

**ZUR BEHANDLUNG VON ROTATIONSBANDEN,
TRÄGHEITSMOMENTEN UND ÜBERGANGSWAHRSCHEIN-
LICHKEITEN DEFORMIERTER ATOMKERNE**

von

Michael Reinecke

aus

Bayreuth

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548407_0035

**ZUR BEHANDLUNG VON ROTATIONSBANDEN,
TRÄGHEITSMOMENTEN UND ÜBERGANGSWAHRSCHEIN-
LICHKEITEN DEFORMIERTER ATOMKERNE**

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Michael Reinecke

aus

Bayreuth

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 28. November 1973

Dekan: Prof. Dr. J. Christiansen

Erstberichterstatter: Prof. Dr. H. Volz

Zweitberichterstatter: Priv. Doz. Dr. H. Ruder

Herrn Professor Dr. H. Volz sei an dieser Stelle für die Überlassung des sehr interessanten Themas und für die in jederzeit bereitwillig gewährten Diskussionen erwiesene Unterstützung gedankt.

Für viele wertvolle und anregende Gespräche, die zum Fortgang der Arbeit sehr wesentlich beitrugen, möchte ich Herrn Privatdozent Dr. H. Ruder sehr herzlich danken.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die gewährte Rechenzeit an der CD 3300 des Rechenzentrums der Universität Erlangen-Nürnberg dankbar.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Teil A: Überlegungen zur Lage und Struktur von Rotationsbanden im Energiespektrum deformierter u-g-, g-u- und u-u-Kerne

- I. Aufstellung des Modellhamiltonoperators und Aufgliederung in die Terme H_I , H_C und H_A
- II. Störungsrechnung der Terme H_C und H_A mit richtig symmetrisierten Basisfunktionen
 1. Ermittlung der richtig symmetrisierten Basisfunktionen
 2. Durchführung der Störungsrechnung
 3. Berechnung der Matrixelemente
 4. Detaillierte Diskussion der Ergebnisse der Störungsrechnung
- III. Anwendung der Modellrechnungen auf u-g- und g-u-Kerne und Vergleich mit dem experimentellen Material
- IV. Anwendung der Modellrechnungen auf u-u-Kerne und Vergleich mit dem experimentellen Material
 1. Allgemeine Betrachtung von H_I
 2. Untersuchung der Diagonalelemente von H_{I1} und Diskussion der in H_{I1} enthaltenen Restwechselwirkung V_{PN}
 3. Das effektive Trägheitsmoment von Rotationsbanden deformierter u-u-Kerne

Teil B: Modellrechnungen zu den elektromagnetischen Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb von Rotationsbanden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne

- I. Berechnung des allgemeinen Ausdrucks für elektromagnetische Übergangswahrscheinlichkeiten von quantenmechanischen Gebilden
- II. Berechnung des Wechselwirkungsterms H_{WW}^1 zwischen Strahlung und Materie sowie der Eigenfunktionen und Energien von H_{MAT} für g-g-, u-g- und g-u-Kerne
 1. g-g-Kerne
 2. u-g- und g-u-Kerne
- III. Untersuchung des Terms $\hat{H}_{WW}^{1+}$ bis zur Quadrupolnäherung
 1. g-g-Kerne
 2. u-g- und g-u-Kerne
- IV. Winkelverteilungen und totale Übergangswahrscheinlichkeiten für E1-, M1- und E2-Strahlung
 1. E1-Strahlung
 2. M1- und E2-Strahlung
- V. Matrixelemente für Übergänge innerhalb von Rotationsbanden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne
 1. g-g-Kerne
 2. u-g- und g-u-Kerne
- VI. Totale gemittelte E2-Übergangswahrscheinlichkeiten für Übergänge innerhalb von Rotationsbanden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne bei spontaner Emission
 1. Übergänge von $L+2 \rightarrow L$ in der Rotationsbande eines g-g-Kerns

2. Übergänge von $J+1 \rightarrow J$ in der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns
3. Übergänge von $J+2 \rightarrow J$ in der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns

VII. Diskussion der Ergebnisse

1. Diskussion der Ergebnisse für E2-Übergänge bei g-g-Kernen
2. Diskussion der Ergebnisse für E2-Übergänge bei u-g- und g-u-Kernen

Schlußbemerkung

Teil C: Anhang, Herleitung der Formeln für Teil A und Teil B

- I. Störungsrechnung der Terme H_C und H_A
- II. Berechnung der Matrixelemente von H_C und H_A
- III. Berechnung der Störenergien erster und zweiter Ordnung
- IV. Berechnung der in erster Ordnung gestörten Wellenfunktion
- V. Matrixelemente von Außenteilchenwellenfunktionen für u-g- und g-u-Kerne
 1. Matrixelemente von Schrauboperatoren
 2. Matrixelemente des Quadrupoltensors
- VI. Matrixelemente von Außenteilchenwellenfunktionen für u-u-Kerne

VII. Vergleich der effektiven Trägheitsmomente
zusammengehöriger $\bar{K}_D$ - und $\bar{K}_S$ -Banden

1. $\bar{K} \neq 0, 1$
2. $\bar{K}_D = 0$
3. $\bar{K} = 1$

VIII. Berechnung der Diagonalelemente der Gauß-
wechselwirkung

1. Herleitung des Matrixelements ohne explizite
Berechnung der Radialintegrale
2. Explizite Bestimmung der Radialintegrale

IX. Transformation der körperfesten kartesischen
Komponenten eines Vektors in die raumfesten
kartesischen Komponenten und umgekehrt

1. Definition von sphärischen Komponenten eines
Vektors
2. Transformation von körperfesten sphärischen
Komponenten auf raumfeste sphärische und
umgekehrt
3. Transformation von körperfesten kartesischen
Komponenten auf raumfeste kartesische und
umgekehrt

X. Umrechnung des Wechselwirkungsterms H_{WW}^1 auf eine
Form, aus der die in B,II benötigten Stromausdrücke
direkt entnommen werden können

1. Für g-g-Kerne
2. Für u-g- und g-u-Kerne

XI. Berechnung von $\hat{A}_{K,1}^{\dagger}$ in Quadrupolnäherung

XII. Explizite Ermittlung von $\hat{H}_{WW,g}^{1\dagger}$

XIII. Eigenschaften der Ausdrücke $F(r,s,k,J)$

1. Symmetrieuntersuchungen
2. Suche nach einfachen Zusammenhängen

XIV. Herleitung der expliziten Gestalt von $\hat{H}_{WW,T}^{1\frac{1}{2}}$

XV. Herleitung der Formeln über das innere Dipol- und Quadrupolmoment

1. Dipolmoment
2. Quadrupolmoment

XVI. Matrixelemente für E2-Übergänge innerhalb der Rotationsbande eines g-g-Kerns

XVII. Matrixelemente für E2-Übergänge innerhalb der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns in adiabatischer Näherung

1. Übergang $J_a = J + 1 \rightarrow J_b = J$
2. Übergang $J_a = J + 2 \rightarrow J_b = J$

XVIII. Matrixelemente für E2-Übergänge innerhalb der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns in verbesserter Näherung

Einleitung

Mit dem bekannten, von Kerman [1] entwickelten, kombinierten Kernmodell für deformierte u-g-, g-u- und u-u-Kerne, bestehend aus einem starren deformierten Rumpf und ein oder zwei unpaarigen Außenteilchen, wie es z.B. von Davidson et al. in [2] und [3] ausführlich beschrieben wird, wurden in den letzten Jahren eine Vielzahl von deformierten Kernen behandelt. Dabei wurde jedoch oftmals, wie z.B. bei den Arbeiten von Mauron et al. [4] und Funke et al. [5], [6] das bei den einzelnen Rotationsbanden auftretende Trägheitsmoment einfach als Reziprokes eines sogenannten Rotationsparameters betrachtet, der als ein von den Eigenschaften des Rumpfes mehr oder weniger unabhängiger Fitparameter betrachtet wird.

Arbeiten, in denen versucht wurde, das bei den einzelnen Rotationsbanden auftretende sogenannte effektive Trägheitsmoment zu berechnen, gehen meist auf die von Prior [7] gemachten Untersuchungen zurück, die das Problem des effektiven Trägheitsmoments nur für u-g- und g-u-Kerne behandelten, es aber auch in diesen Fällen, wie im Laufe dieser Arbeit genau erläutert wird, nicht befriedigend lösen konnten.

Deshalb soll in Teil A der vorliegenden Arbeit das effektive Trägheitsmoment von Rotationsbanden deformierter u-g-, g-u- und u-u-Kerne durch eine exakte Methode ohne Verwendung freier Parameter berechnet werden.

Dazu wird zunächst der Modellhamiltonoperator H aufgestellt und in die drei Anteile H_I , H_C und H_A zerlegt, wobei der Gesamtdrehimpuls J in H_I gar nicht, in H_C linear und in H_A quadratisch enthalten ist. Analog zu den von Ruder in [8] durchgeführten Überlegungen zur Berechnung des effektiven Trägheitsmoments von g-g-Kernen werden die Terme H_C und H_A in konsequenter, die Symmetrien des Problems berücksichtigender Störungsrechnung behandelt und damit allgemeine Ausdrücke für die Energien und Wellenfunktionen von Niveaus von Rotationsbanden der betrachteten Kerne gewonnen, wobei sich auch Formeln für das effektive Trägheitsmoment dieser Banden ergeben.

Diese allgemeinen Untersuchungen werden dann auf u-g- und g-u-Kerne und unter besonderer Berücksichtigung der nur bei u-u-Kernen auftretenden Restwechselwirkung V_{PN} auch auf u-u-Kerne angewandt, wobei sich im Vergleich mit dem Experiment zeigen wird, daß unsere Ergebnisse durchaus befriedigend sind.

Nachdem in Teil A die stationären Zustände deformierter Kerne untersucht worden sind, soll Teil B eine grundsätzliche Behandlung der elektromagnetischen Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb von Rotationsbanden bringen. Obwohl z.B. die E2-Übergangswahrscheinlichkeiten in der Literatur schon ausführlich erörtert worden sind (z.B. in [9]), soll speziell dieses Problem noch einmal in konsequenter Weise mit dem schon in Teil A mit Erfolg benützten Kernmodell untersucht werden.

Dabei betrachten wir den Rumpf als starres, homogen geladenes Sphäroid und führen, ohne zur Beschreibung der kollektiven Rotation redundante Variable zu benützen, die Ankopplung an das Strahlungsfeld durch. Zu diesem Zweck wird zunächst der Hamiltonoperator eines mit dem Strahlungsfeld wechselwirkenden, homogen geladenen Sphäroids aufgestellt.

Hinzunahme eines Außenteilchens ergibt dann auch den Hamiltonoperator eines u-g- oder g-u-Kerns, der mit dem Strahlungsfeld wechselwirkt, wobei die Mitbewegung des Rumpfes im äußeren Feld durch die Einführung effektiver Ladungen berücksichtigt wird.

Entwicklung des Wechselwirkungsterms bis zur Quadrupolnäherung liefert die für die Aussendung von E1-, M1- und E2-strahlung verantwortlichen Störterme. Danach werden die differentiellen, totalen und gemittelten Übergangswahrscheinlichkeiten für alle drei Störterme angegeben.

Nach Berechnung der für E2-Strahlung auftretenden Matrixelemente für Übergänge innerhalb von Rotationsbanden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne können schließlich die Endformeln für die E2-Übergangswahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

Die erhaltenen Ergebnisse, die speziell für g-g-Kerne exakt mit denen früherer Rechnungen übereinstimmen, werden diskutiert, und es wird insbesondere die Frage untersucht, was für

die auf Grund des gänzlich anderen Ausgangspunkts und der völlig verschiedenen Behandlungsmethoden überraschende Übereinstimmung verantwortlich ist. Dabei zeigt sich, daß die bei den früheren Rechnungen mit zusätzlichen redundanten Variablen systemfremd angeheftete kollektive Rotationsbewegung letztlich, allerdings auf völlig undurchsichtigen und fragwürdigen Weg, das gleiche bringt, wie unsere einfache und durchsichtige Rechnung.

Teil A

Überlegungen zur Lage und Struktur von Rotationsbanden im Energiespektrum deformierter u-g-, g-u- und u-u-Kerne

I. Aufstellung des Modellhamiltonoperators und Auf- gliederung in die Terme H_I , H_C und H_A

Für u-g-, g-u- und u-u-Kerne benützen wir das allgemein bekannte kombinierte Kernmodell, bestehend aus einem starren, deformierten, symmetrischen g-g-Rumpf (Rumpfmasse M) in Form eines Sphäroids und ein oder zwei unpaarigen Außenteilchen (Außenteilchenmassen m). Wir denken uns die nicht weiter interessierende Bewegung des Gesamtschwerpunkts abgespariert und beschreiben die innere Bewegung in einem reduzierten System. Als reduziertes System wählen wir unter Verzicht auf Anteile von der Größenordnung $(m/M)^2$ ein solches, in welchem der Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Rumpfes liegt und das oder die Außenteilchen die reduzierten Massen $m_R = m \cdot M / (m + M)$ haben. Jedes Außenteilchen i wird mit Koordinaten $r_i, \vartheta_i, \varphi_i$ (im folgenden kurz mit $\underline{r}_i$ bezeichnet) bezüglich eines am Rumpf hängenden ξ - η - ζ -Koordinatensystems beschrieben, dessen ζ -Achse die Symmetrieachse des Rumpfes ist. Die ζ -Achse ist im folgenden stets die Quantisierungsachse für die Drehimpulse. Alle vorkommenden Vektoren werden durch ihre Komponenten bezüglich des rumpffesten ξ - η - ζ -Systems beschrieben. Die Lage der in der Äquatorebene liegenden ξ - und η -Achsen brauchen wir für das folgende nicht näher festzulegen. Die Orientierung des ξ - η - ζ -Systems bezüglich des raumfesten X-Y-Z-Systems wird durch die drei Eulerschen Winkel α, β, γ festgelegt.

Das oder die Außenteilchen bewegen sich in einem am Rumpf hängenden deformierten Potential $V_N(\underline{r}_i)$. Falls wir zwei Außenteilchen, also den Fall eines u-u-Kerns vor uns haben, so wirkt zwischen beiden die Restwechselwirkung V_{PN} , für die wir einige Ansätze diskutieren wollen.

Wie schon in [10] ausführlich gezeigt wurde, erhält man

für unser Modell zunächst den folgenden Hamiltonoperator :

$$(A, I, 1) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{t=\xi, \eta, \zeta} \frac{L_{Rt}^2}{\Theta_t} + \sum_i \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta_i + V_N(r_i) \right\} + V_{PN}.$$

Dabei sind Θ_t die drei Hauptträgheitsmomente des Rumpfes, $L_{R,t}$ sind die Komponenten des Rumpfdrehimpulsoperators bezüglich des ξ - η - ζ -Systems, i ist der Index des Außenteilchens. Da der Rumpf axialsymmetrisch sein soll, gilt :

$$(A, I, 2) \quad \Theta_\xi = \Theta_\eta = \Theta_0.$$

Führen wir anstelle des Rumpfdrehimpulsoperators $\underline{L}_R$ den Gesamtdrehimpulsoperator $\underline{J}$ ein, dessen ξ - η - ζ -Komponenten die bekannten anomalen Vertauschungsrelationen erfüllen und der bei unserer Koordinatenwahl nur auf die Eulerschen Winkel wirkt, so ergibt sich mit Hilfe der Beziehung

$$(A, I, 3) \quad \underline{L}_R = \underline{J} - \sum_i \underline{j}_i,$$

wobei $\underline{j}_i$ der Gesamtdrehimpuls des betreffenden Außenteilchens ist, und den Definitionen

$$(A, I, 4) \quad \underline{j}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \underline{j}_\xi - i \underline{j}_\eta), \quad \underline{j}_{i \pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \underline{j}_{i\xi} - i \underline{j}_{i\eta})$$

nach kurzer Umformung für den Hamiltonoperator

$$(A, I, 5) \quad H = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta_i + V_N(r_i) \right) + \frac{1}{2\Theta_0} \left\{ \left(\sum_i \underline{j}_i \right)^2 - \left(\sum_i \underline{j}_{i\zeta} \right)^2 \right\} + V_{PN} \\ + \frac{1}{\Theta_0} \left\{ \underline{j}_{+1} \sum_i \underline{j}_{i-1} + \underline{j}_{-1} \sum_i \underline{j}_{i+1} \right\} + \frac{1}{2\Theta_0} \{ \underline{j}^2 - \underline{j}_\zeta^2 \} + \frac{1}{2\Theta_\zeta} L_\zeta^2.$$

Da $L_{R\zeta}$ mit H vertauscht, können wir die Eigenfunktionen von H so wählen, daß sie Eigenfunktionen von $L_{R\zeta}$ sind. Wenn wir fordern, daß der Rumpf nicht um seine Symmetrieachse, die ζ -Achse rotieren soll, dann hat die zu $L_{R\zeta}$ gehörige Quantenzahl den Wert 0. Für Eigenfunktionen von H mit Eigenwert 0 zu $L_{R\zeta}$ liefert dann der letzte Term des Hamiltonoperators keine Matrixelemente und hat in diesem Fall, den wir im folgenden ausschließlich betrachten wollen,

keine Bedeutung. Die anderen Terme von H haben wir in $(A, I, 5)$ bereits in Anteile aufgegliedert, die Komponenten von $\underline{J}$ entweder gar nicht, oder linear, oder quadratisch enthalten und die wir mit H_I , H_C und H_A bezeichnen, so daß also gilt :

$$(A, I, 6) \quad H = H_I + H_C + H_A .$$

Wie man sofort aus $(A, , 5)$ entnimmt, haben die einzelnen Anteile die folgende Gestalt :

$$(A, I, 7a) \quad H_I = \sum_i \left\{ -\frac{\hbar^2}{2mR} \Delta_i + V_N(r_i) \right\} + \frac{1}{2\Theta_0} \left\{ \left(\sum_i j_i \right)^2 - \left(\sum_i j_{i3} \right)^2 \right\} + V_{PN}$$

$$(A, I, 7b) \quad H_C = \frac{1}{\Theta_0} \left\{ j_{+1} \sum_i j_{i-1} + j_{-1} \sum_i j_{i+1} \right\}$$

$$(A, I, 7c) \quad H_A = \frac{1}{2\Theta_0} \left\{ j^2 - j_3^2 \right\} .$$

Bei unserer am Anfang getroffenen Koordinatenwahl enthält H_I nur die Koordinaten der Außenteilchen, H_A nur die Eulerschen Winkel, H_C jedoch beides. Außerdem liefert H_C in $\underline{J}$ lineare und H_A in $\underline{J}$ quadratische Matrixelemente.

Im nächsten Kapitel wollen wir die Beiträge zur Energie der Terme H_C und H_A in Störungsrechnung ermitteln, wobei wir wegen der genannten Abhängigkeit von $\underline{J}$ den Anteil H_C als Störoperator erster Ordnung und H_A als Störoperator zweiter Ordnung bezeichnen.

Um die Störungsrechnung durchführen zu können, sollen jedoch zunächst im Abschnitt 1 des Kapitels II die richtig symmetrisierten Basisfunktionen für die Störungsrechnung ermittelt werden.

II. Störungsrechnung der Terme H_C und H_A mit richtig symmetrisierten Basisfunktionen.

1. Ermittlung der richtig symmetrisierten Basisfunktionen.

Betrachten wir zunächst einige Eigenschaften der Eigenfunktionen von H_I . Da H_I mit $j_3 = \sum_i j_{i3}$ vertauscht, können wir die Eigenfunktionen $\Psi_{r,K}$ von H_I so wählen, daß sie auch Eigenfunktionen von j_3 mit Eigenwert $\hbar K$ sind. Außerdem sind die zu $\pm K$ gehörigen Eigenfunktionen von H_I auf Grund der Axialsymmetrie des am Rumpf hängenden Potentials energetisch entartet. Dann gilt für die Eigenfunktionen von H_I

$$(A, II, 1) \quad H_I \Psi_{r,\pm K} = E_{r,K} \Psi_{r,\pm K} ; \quad j_3 \Psi_{r,\pm K} = \pm \hbar K \Psi_{r,\pm K} .$$

Da die $\Psi_{r,K}$ nur die auf das körperfeste System bezogenen Außenteilchenkoordinaten und die zugehörigen Spins enthalten und in diesen Variablen auch ein vollständiges ON-System bilden, in ihnen jedoch die in H_C und H_A vorkommenden Eulerschen Winkel nicht auftreten, müssen wir, um zu einer Basis für die Störungsrechnung zu gelangen, zu dem vollständigen ON-System der $\Psi_{r,K}$ noch das in den Eulerschen Winkeln vollständige ON-System der Kreiseigenfunktionen $D_{M,K}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ hinzunehmen. Als Basisfunktionen könnte man dann etwa Produktfunktionen der Form

$$(A, II, 2) \quad |r, j, M, K\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi^2}} \Psi_{r,K} D_{M,K}^j$$

benützen, müßte dann aber wegen (A, II, 1) Störungsrechnung mit Entartung betreiben. Dies können wir umgehen, wenn wir eine weitere Symmetrieeigenschaft des Hamiltonoperators ausnützen.

Der Gesamthamiltonoperator ist mit der Operation R_1 (Drehung des Rumpfes um 180° um eine in der $\xi\text{-}\eta$ -Ebene liegende Achse) vertauschbar. Deshalb lassen sich die Eigenfunktionen von H so wählen, daß sie auch Eigenfunktionen

von R_1 sind, die, wie man wegen $R_1 R_1 = 1$ sofort sieht, die Eigenwerte $u = \pm 1$ haben. Eine Eigenfunktion von H zum Eigenwert u von R_1 läßt sich nur aus solchen Basisfunktionen linearkombinieren, die bereits Eigenfunktionen zum Eigenwert u von R_1 sind.

Wie wir in [11] gezeigt haben, dürfen wir zur Beschreibung von u-g-, g-u- und u-u-Kernen nur Eigenfunktionen zum Eigenwert $u = +1$ und damit also nur bezüglich R_1 symmetrische Basisfunktionen benutzen. Um diese konstruieren zu können, geben wir nun das Verhalten der Funktionen $\Psi_{\nu, K}$ und $D_{M, K}^J$ bezüglich R_1 an.

Für $K \neq 0$ gilt, wie in [10] gezeigt wurde,

$$(A, II, 3) \quad R_1 \Psi_{\nu, K} = (-1)^{K + \sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \Psi_{\nu, -K}$$

(wobei $N_i =$ Außenteilchenhauptquantenzahl, siehe A, III)

$$(A, II, 4) \quad R_1 D_{M, K}^3 = (-1)^{3-K} D_{M, -K}^3$$

Damit erhalten wir sofort die folgenden Basisfunktionen

$$(A, II, 5) \quad |\nu, 3, M, K\rangle = \sqrt{\frac{23+1}{16\pi^2}} \{ \Psi_{\nu, K} D_{M, K}^3 + (-1)^{3 + \sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \Psi_{\nu, -K} D_{M, -K}^3 \},$$

wobei hier $K > 0$ bereits alle möglichen linear unabhängigen Funktionen liefert.

Im Fall $K = 0$ gilt :

$$(A, II, 6) \quad R_1 D_{M, 0}^3 = (-1)^3 D_{M, 0}^3$$

Da demnach $D_{M, 0}^J$ bereits Eigenfunktion zu R_1 ist, müssen auch die Eigenfunktionen von $H_{\perp}$ so gewählt werden, daß sie Eigenfunktionen von R_1 sind. Wie in A, IV gezeigt wird, lassen sich die Eigenfunktionen von $H_{\perp}$ mit $K = 0$ in zwei Arten $\Psi_{\nu, 0}$ und $\Psi_{\nu, 0}$ klassifizieren, die diese Forderung erfüllen. Für sie gilt :

$$(A, II, 7) \quad R_1 \Psi_{\nu, \pm, 0} = \pm \Psi_{\nu, \pm, 0}, \quad \langle \Psi_{\nu, \pm, 0} | \Psi_{\nu, \pm, 0} \rangle = 2.$$

(Diese Normierung bewirkt, daß vor allen Basisfunktionen der gleiche Faktor $\sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}}$ steht.)

Für die bezüglich R_1 symmetrische Basisfunktion mit $K = 0$ erhalten wir dann :

$$(A, II, 8) \quad |v, J, M, 0\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} \psi_{v,0}^J D_{M,0}^J,$$

wobei :

$$(A, II, 9) \quad \psi_{v,0}^J = \begin{cases} \psi_{v^+,0} & \text{für gerades } J \\ \psi_{v^-,0} & \text{für ungerades } J. \end{cases}$$

Durch (A, II, 5) mit $K > 0$ sowie durch (A, II, 8) für $K = 0$ sind alle linear unabhängigen Basisfunktionen bestimmt. Wie aus [11] hervorgeht, haben diese Basisfunktionen die Parität $(-1)^{\sum_i (N_i)}$, die gleich der Parität der betreffenden Außenteilchenzustände ist.

Die durch (A, II, 7) definierten Funktionen $\psi_{v^{\pm},0}^J$ (die nur bei u-u-Kernen auftreten) haben im allgemeinen verschiedene Energiewerte, obwohl in beiden Fällen Proton und Neutron die gleichen Nilsson-niveaus besetzen. Auf $\psi_{v^{\pm},0}^J$ baut sich jeweils eine Rotationsbande mit geradzahligen bzw. ungeradzahligen Drehimpulsen auf. Falls sich $E_{v^+,0}$ und $E_{v^-,0}$ nur wenig unterscheiden, haben beide Banden im wesentlichen das gleiche Trägheitsmoment, so daß man oft von einer $K=0$ -Bande spricht, in der die Niveaus mit geradem Drehimpuls gegenüber den Niveaus mit ungeradem Drehimpuls um einen für alle Niveaus konstanten Energiebetrag verschoben sind. Dieser Effekt wird in der Literatur als odd-even-shift bezeichnet und wird, wie in A, IV genau erläutert wird, im wesentlichen durch die Restwechselwirkung V_{PN} hervorgerufen. Wegen der besonderen Eigenschaften von $\psi_{v,0}^J$ treten bei u-u-Kernen bei den Fällen $K = 0, 1$ einige Besonderheiten auf.

Im Falle eines u-g- bzw. g-u-Kerns sind J und K halbzahlig. Der nur hier auftretende Fall $K = \frac{1}{2}$ erfordert eine besondere Betrachtung.

2. Durchführung der Störungsrechnung

Wir wollen nun untersuchen, welche Störenergie bis zur zweiten Ordnung zu der Außenteilchenenergie $E_{\vec{v}, \vec{k}}$ mit der Wellenfunktion $\psi_{\vec{v}, \vec{k}}$ durch die Terme H_C und H_A hinzukommt. Da H_C ein Störterm erster Ordnung, H_A jedoch ein Störterm zweiter Ordnung ist, erhalten wir die Störenergie erster Ordnung $\mathcal{E}_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(1)}$ durch die Diagonalelemente von H_C , die Störenergie zweiter Ordnung $\mathcal{E}_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(2)}$ durch die Diagonalelemente von H_A sowie durch Beiträge zweiter Ordnung des Terms H_C .

Wir wollen nun die Ergebnisse der im Anhang C,I durchgeführten Störungsrechnung angeben. Für die Energien nullter Ordnung $\mathcal{E}_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(0)}$ erhält man:

$$(A, II, 10a) \quad \mathcal{E}_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(0)} = E_{\vec{v}, \vec{k}} \text{ für } \vec{k} \neq 0$$

$$(A, II, 10b) \quad \mathcal{E}_{\vec{v}, 0, \vec{z}}^{(0)} = \begin{cases} E_{\vec{v}, 0} & \text{für gerades } J \\ E_{\vec{v}, 0} & \text{für ungerades } J \end{cases} := E_{\vec{v}, 0}.$$

Dabei ist bei der im folgenden stets verwendeten Abkürzung $E_{\vec{v}, 0}$ zu beachten, daß diese J -abhängig ist. Falls in den folgenden Formeln $\vec{k} = 0$ oder $K = 0$ auftreten kann, ist für $E_{\vec{v}, 0}$ bzw. $E_{\vec{v}, 0}$ stets der durch die obige Formel gegebene J -abhängige Wert gemeint.

Nach der im Anhang durchgeführten Schrödingerschen Störungsrechnung erhält man für die Störenergie erster und zweiter Ordnung:

$$(A, II, 11) \quad \mathcal{E}_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(1)} = \langle \vec{v}, \vec{z}, M, \vec{k} | H_C | \vec{v}, \vec{z}, M, \vec{k} \rangle$$

$$(A, II, 12) \quad \mathcal{E}_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(2)} = \langle \vec{v}, \vec{z}, M, \vec{k} | H_A | \vec{v}, \vec{z}, M, \vec{k} \rangle - \sum_{\substack{(\vec{v}, \vec{k}) \neq \\ (\vec{v}, \vec{k})}} \frac{|\langle \vec{v}, \vec{z}, M, K | H_C | \vec{v}, \vec{z}, M, \vec{k} \rangle|^2}{E_{\vec{v}, \vec{k}} - E_{\vec{v}, \vec{k}}}.$$

Für die gestörte Wellenfunktion $\psi_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(1)}$ in erster Ordnung erhält man:

$$(A, II, 13) \quad \psi_{\vec{v}, \vec{k}, \vec{z}}^{(1)} = |\vec{v}, \vec{z}, M, \vec{k}\rangle - \sum_{\substack{(\vec{v}, \vec{k}) \neq \\ (\vec{v}, \vec{k})}} \frac{\langle \vec{v}, \vec{z}, M, K | H_C | \vec{v}, \vec{z}, M, \vec{k} \rangle}{E_{\vec{v}, \vec{k}} - E_{\vec{v}, \vec{k}}} |\vec{v}, \vec{z}, M, K\rangle.$$

3. Berechnung der Matricelemente

Da sowohl die Wellenfunktionen als auch H_C Summen von Produkten sind, deren einer Faktor nur die Teilchenkoordinaten, deren anderer Faktor nur die Eulerschen Winkel enthält, können wir die Integration über die Teilchenkoordinaten und über die Eulerschen Winkel getrennt durchführen. Wie in C, II explizit gezeigt wird, erhält man nach der Integration über die Eulerschen Winkel folgende Ausdrücke für die benötigten Matricelemente:

$$(A, II, 14) \quad \langle \bar{v}, \bar{z}, M, \bar{K} | H_C | \bar{v}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{J+N+\frac{1}{2}} \left(\bar{z} + \frac{1}{2}\right) \langle \psi_{\bar{v}, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}}$$

$$(A, II, 15) \quad \langle \bar{v}, \bar{z}, M, \bar{K} | H_A | \bar{v}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \{ J(J+1) - \bar{K}^2 \}.$$

Wir stellen gleich hier fest: Da $\bar{K}$ nur bei u-g- und g-u-Kernen halbzahlig sein kann, verschwindet das Diagonalelement von H_C bei u-u-Kernen grundsätzlich. Für die Nichtdiagonalelemente von H_C erhält man in allen Fällen mit $\bar{K} \neq 0, 1$:

$$\begin{aligned} & \langle v, \bar{z}, M, K | H_C | \bar{v}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = \\ & = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(J-\bar{K})(J+\bar{K}+1)} \langle \psi_{v, \bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle \delta_{K, \bar{K}+1} - \\ & - \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(J+\bar{K})(J-\bar{K}+1)} \langle \psi_{v, \bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle \delta_{K, \bar{K}-1} + \\ & + \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{J+N+\frac{1}{2}} \left(\bar{z} + \frac{1}{2}\right) \langle \psi_{v, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für die Spezialfälle $\bar{K} = 0$ und $\bar{K} = 1$ ergibt sich:

$$(A, II, 17) \quad \langle v, \bar{z}, M, K | H_C | \bar{v}, \bar{z}, M, 0 \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{J(J+1)} \langle \psi_{v, 1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, 0}^J \rangle \delta_{K, 1}$$

$$\begin{aligned} & \langle v, \bar{z}, M, K | H_C | \bar{v}, \bar{z}, M, 1 \rangle = \\ & = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \left[\sqrt{(J-1)(J+2)} \langle \psi_{v, 2} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, 1} \rangle \delta_{K, 2} - \sqrt{J(J+1)} \langle \psi_{v, 0}^J | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, 1} \rangle \delta_{K, 0} \right] \end{aligned}$$

An den Formeln für die Matrixelemente sieht man bereits die besondere Rolle der Fälle $\bar{K} = \frac{1}{2}, 0, 1$. Sie werden deshalb im folgenden getrennt betrachtet.

4. Detaillierte Diskussion der Ergebnisse der Störungsrechnung.

a) Betrachtung der Fälle mit $\bar{K} \neq \frac{1}{2}, 0, 1$.

In diesen Fällen ist $\mathcal{E}_{\tilde{\nu}, \bar{K}, 3}^{(1)} = 0$. Der Beitrag

$$\mathcal{E}_{\tilde{\nu}, \bar{K}, 3}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} [3(3+1) - \bar{K}(\bar{K}+1)] \cdot$$

$$(A, II, 19) \quad \cdot \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\nu} \left(\frac{|\langle \psi_{\nu, \bar{K}-1} | \hat{J}_{-1} | \psi_{\tilde{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}-1} - E_{\tilde{\nu}, \bar{K}}} + \frac{|\langle \psi_{\nu, \bar{K}+1} | \hat{J}_{+1} | \psi_{\tilde{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}+1} - E_{\tilde{\nu}, \bar{K}}} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \bar{K} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\nu} \frac{|\langle \psi_{\nu, \bar{K}-1} | \hat{J}_{-1} | \psi_{\tilde{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}-1} - E_{\tilde{\nu}, \bar{K}}} \right)$$

enthält nur J-unabhängige Außenteilchenmatrixelemente und -Energien. Damit hat die Störenergie bis zur zweiten Ordnung $E_{\tilde{\nu}, \bar{K}, 3}$ die Form:

$$(A, II, 20) \quad E_{\tilde{\nu}, \bar{K}, 3} = A(\tilde{\nu}, \bar{K}) + \frac{\hbar^2 3(3+1)}{2 \Theta_{\text{eff}}(\tilde{\nu}, \bar{K})} \quad ,$$

wobei gilt:

$$(A, II, 21) \quad \Theta_{\text{eff}}(\tilde{\nu}, \bar{K}) =$$

$$\sim \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\nu} \left(\frac{|\langle \psi_{\nu, \bar{K}-1} | \hat{J}_{-1} | \psi_{\tilde{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}-1} - E_{\tilde{\nu}, \bar{K}}} + \frac{|\langle \psi_{\nu, \bar{K}+1} | \hat{J}_{+1} | \psi_{\tilde{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}+1} - E_{\tilde{\nu}, \bar{K}}} \right) \right)^{-1}$$

$$(A, II, 22) \quad A(\tilde{\nu}, \bar{K}) = E_{\tilde{\nu}, \bar{K}} - \frac{\hbar^2 \bar{K}(\bar{K}+1)}{2 \Theta_{\text{eff}}(\tilde{\nu}, \bar{K})} + \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \bar{K} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\nu} \frac{|\langle \psi_{\nu, \bar{K}-1} | \hat{J}_{-1} | \psi_{\tilde{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}-1} - E_{\tilde{\nu}, \bar{K}}} \right) .$$

Die Energie hat also in dieser Näherung eine saubere $J(J+1)$ -Abhängigkeit. Die dazugehörigen Niveaus bilden eine unverzerzte Rotationsbande mit dem effektiven Trägheitsmoment $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{\nu}, \bar{K})$, das vom Zustand $\psi_{\tilde{\nu}, \bar{K}}$ des oder der

Außenteilchen abhängt, das der Bande zugrunde liegt. Für die Energie des Bandenkopfs $E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{K}}$ der Rotationsbande ergibt sich:

$$(A, II, 23) \quad E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{K}} = E_{\bar{\nu}, \bar{K}} + \frac{\hbar^2 \bar{K}}{2\Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\bar{\nu}} \frac{|\langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} | j-1 | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} \right)$$

und für den Abstand $\Delta E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{K}}$ eines Niveaus der Rotationsbande vom Bandenkopf erhält man:

$$(A, II, 24) \quad \Delta E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{K}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta_{\text{eff}}(\bar{\nu}, \bar{K})} \{ \bar{K}(\bar{K}+1) - \bar{K}(\bar{K}+1) \}.$$

Die Formeln (A, II, 23) und (A, II, 24) enthalten Größen, die, solange es sich bei einem Bandenkopf nicht um den Grundzustand des betreffenden Kerns handelt, für den Vergleich mit dem Experiment geeignet sind. (A, II, 23) gibt durch Differenzbildung die Abstände zwischen verschiedenen Bandenköpfen, (A, II, 24) die Abstände innerhalb von Rotationsbanden an.

Die in den obigen Gleichungen ermittelten Energien sind natürlich nur bis zur zweiten Ordnung richtig. Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung ist jedoch nur dann ausreichend, wenn die auftretenden Matrixelemente von H_C klein gegenüber dem entsprechenden Energienenner sind, was in jedem Einzelfall nachgeprüft werden muß. Nur wenn dies der Fall ist, kann man hoffen, mit der Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung das experimentelle Spektrum wiedergeben zu können.

Während in den Fällen $\bar{K} \neq \frac{1}{2}, 0, 1$ in Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung saubere, unverzerrte Rotationsbanden auftreten, ist dies, wie im folgenden gezeigt wird, in den Fällen $\bar{K} = \frac{1}{2}, 0, 1$ entweder nur näherungsweise oder aber gar nicht der Fall.

b) Betrachtung des Falls $\bar{K} = \frac{1}{2}$.

Für $\bar{K} = \frac{1}{2}$ erhält man, wie in C,III gezeigt wird :

$$(A, II, 25) \quad \mathcal{E}_{\bar{v}, \frac{1}{2}, 3}^{(1)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} (-1)^{J+\frac{1}{2}} (3+\frac{1}{2}) (-1)^N \langle \psi_{\bar{v}, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle$$

$$\mathcal{E}_{\bar{v}, \frac{1}{2}, 3}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2 \Theta_0} [3(3+1) - \frac{3}{4}] ,$$

$$(A, II, 26) \quad \cdot \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{v \neq \bar{v}} \left(\frac{|\langle \psi_{v, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{v, \frac{1}{2}} - E_{\bar{v}, \frac{1}{2}}} + \frac{|\langle \psi_{v, \frac{3}{2}} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{v, \frac{3}{2}} - E_{\bar{v}, \frac{1}{2}}} \right) \right) + \\ + \frac{\hbar^2}{4 \Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{v \neq \bar{v}} \frac{|\langle \psi_{v, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{v, \frac{1}{2}} - E_{\bar{v}, \frac{1}{2}}} \right) .$$

und damit folgende Energie $E_{\bar{v}, \frac{1}{2}, 3}$ bis zur zweiten Ordnung :

$$(A, II, 27) \quad E_{\bar{v}, \frac{1}{2}, 3} = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} a(\bar{v}, \frac{1}{2}) (-1)^{J+\frac{1}{2}} (3+\frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 3(3+1)}{2 \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \frac{1}{2})} + A(\bar{v}, \frac{1}{2}) ,$$

wobei gilt :

$$(A, II, 28) \quad \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \frac{1}{2}) = \\ = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{v \neq \bar{v}} \left(\frac{|\langle \psi_{v, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{v, \frac{1}{2}} - E_{\bar{v}, \frac{1}{2}}} + \frac{|\langle \psi_{v, \frac{3}{2}} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{v, \frac{3}{2}} - E_{\bar{v}, \frac{1}{2}}} \right) \right)^{-1} ,$$

$$(A, II, 29) \quad a(\bar{v}, \frac{1}{2}) = (-1)^N \langle \psi_{\bar{v}, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle ,$$

$$(A, II, 30) \quad A(\bar{v}, \frac{1}{2}) = E_{\bar{v}, \frac{1}{2}} - \frac{3/4 \hbar^2}{2 \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \frac{1}{2})} + \\ + \frac{\hbar^2}{4 \Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{v \neq \bar{v}} \frac{|\langle \psi_{v, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{v, \frac{1}{2}} - E_{\bar{v}, \frac{1}{2}}} \right) .$$

Auf Grund des Glieds mit $(-1)^{J(J+\frac{1}{2})}$ erhalten wir hier keine saubere $J(J+1)$ -Abhängigkeit, sondern eine gestörte Rotationsbande, deren Gestalt durch $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \frac{1}{2})$ und $a(\bar{v}, \frac{1}{2})$, den "decoupling parameter" bestimmt wird. Für die Energie des Bandenkopfs $E_{\bar{v}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ ergibt sich :

$$(A, II, 31) \quad E_{\tilde{v}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = E_{\tilde{v}, \frac{1}{2}} - \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} \alpha(\tilde{v}, \frac{1}{2}) + \\ + \frac{\hbar^2}{4 \Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{v \neq \tilde{v}} \frac{|\langle \psi_{v, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\tilde{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{v, \frac{1}{2}} - E_{\tilde{v}, \frac{1}{2}}} \right)$$

und für den Abstand $\Delta E_{\tilde{v}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$ eines Niveaus der $\bar{K} = \frac{1}{2}$ -Bande vom Bandenkopf erhält man:

$$(A, II, 32) \quad \Delta E_{\tilde{v}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} = \\ = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} \alpha(\tilde{v}, \frac{1}{2}) \{ (j + \frac{1}{2}) (-1)^{j + \frac{1}{2}} + 1 \} + \frac{\hbar^2}{2 \Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, \frac{1}{2})} \{ j(j+1) - \frac{3}{4} \}.$$

c) Betrachtung der Fälle $\bar{K} = 0, 1$.

Für $\bar{K} = 0$ ergibt sich, wie in C, III ausgeführt wird:

$$(A, II, 33) \quad \xi_{\tilde{v}, 0, \frac{3}{2}}^{(2)} = \\ = \frac{\hbar^2}{2 \Theta_0} \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \frac{|\langle \psi_{v, 1} | j_{+1} | \psi_{\tilde{v}, 0}^{\frac{3}{2}} \rangle|^2}{E_{v, 1} - E_{\tilde{v}, 0}} \right) j(j+1).$$

Dabei ist zu beachten, daß sowohl $\psi_{\tilde{v}, 0}^{\frac{3}{2}}$ als auch $E_{\tilde{v}, 0}$ für gerades und ungerades j verschieden sind und somit die Summe j -abhängig ist. Eine entsprechende j -Abhängigkeit enthält auch der Beitrag für $\bar{K} = 1$:

$$(A, II, 34) \quad \xi_{\tilde{v}, 1, \frac{3}{2}}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2 \Theta_0} [j(j+1) - 2] \cdot \\ \cdot \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \left(\frac{|\langle \psi_{v, 0}^{\frac{3}{2}} | j_{-1} | \psi_{\tilde{v}, 1} \rangle|^2}{E_{v, 0} - E_{\tilde{v}, 1}} + \frac{|\langle \psi_{v, 2} | j_{+1} | \psi_{\tilde{v}, 1} \rangle|^2}{E_{v, 2} - E_{\tilde{v}, 1}} \right) \right) + \\ + \frac{\hbar^2}{2 \Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_v \frac{|\langle \psi_{v, 0}^{\frac{3}{2}} | j_{-1} | \psi_{\tilde{v}, 1} \rangle|^2}{E_{v, 0} - E_{\tilde{v}, 1}} \right).$$

In beiden Fällen erhält man wieder folgende Formel für die Energie bis zur zweiten Ordnung:

$$(A, II, 35) \quad E_{\tilde{v}, 1, 3} = A(\tilde{v}, 1) + \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, 1)}$$

wobei gilt :

$$(A, II, 36a) \quad \Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, 0) = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \frac{|\langle \psi_{v,1} | j_{+1} | \psi_{\tilde{v},0}^3 \rangle|^2}{E_{v,1} - E_{\tilde{v},0}} \right)^{-1}$$

$$(A, II, 36b) \quad \Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, 1) = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \left(\frac{|\langle \psi_{v,0}^3 | j_{-1} | \psi_{\tilde{v},1} \rangle|^2}{E_{v,0} - E_{\tilde{v},1}} + \frac{|\langle \psi_{v,2} | j_{+1} | \psi_{\tilde{v},1} \rangle|^2}{E_{v,2} - E_{\tilde{v},1}} \right) \right)^{-1}$$

$$(A, II, 37a) \quad A(\tilde{v}, 0) = E_{\tilde{v},0}$$

$$(A, II, 37b) \quad A(\tilde{v}, 1) = E_{\tilde{v},1} - \frac{2\hbar^2}{2\Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, 1)} + \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_v \frac{|\langle \psi_{v,0}^3 | j_{-1} | \psi_{\tilde{v},1} \rangle|^2}{E_{v,0} - E_{\tilde{v},1}} \right).$$

Wegen der J-Abhängigkeit von $A(\tilde{v}, 1)$ und $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, 1)$ erhalten wir hier keine sauberen Rotationsbanden mit reiner $J(J+1)$ -Energieabhängigkeit.

Im Fall $\bar{K} = 0$ ist $E_{\tilde{v},0}$ wegen des bereits vorher erwähnten odd-even-shift für gerades und ungerades J verschieden, so daß die $\bar{K}=0$ -Bande in zwei Teilbanden, eine mit geraden und eine mit ungeraden Drehimpulsen, aufspaltet. Da bei der Formel für $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, 0)$ die J-abhängige Energie im Nenner auftaucht, sind außerdem auch etwas verschiedene effektive Trägheitsmomente für beide Teilbanden zu erwarten.

Im Fall $\bar{K} = 1$ zeigen $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{v}, 1)$ und $A(\tilde{v}, 1)$ wegen der im Energienenner vorkommenden Größe $E_{\tilde{v},0}$ eine leichte J-Abhängigkeit.

Für die Fälle $\bar{K} = 0$ und $\bar{K} = 1$ wollen wir nun auch wieder die zum Vergleich mit dem Experiment sehr gut geeigneten Energien der Bandenköpfe und die Abstände der Rotationszustände vom entsprechenden Bandenkopf angeben. Wie in C, III gezeigt wird, ergibt sich :

$$(A, II, 38a) \quad E_{\tilde{v},0,0} = E_{\tilde{v},0}$$

$$(A, II, 38b) \quad E_{\bar{v},1,1} = E_{\bar{v},1} + \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_v \frac{|\langle \psi_{v,0}^{(3)} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},1} \rangle|^2}{E_{v,0} - E_{\bar{v},1}} \right),$$

$$(A, II, 39a) \quad \Delta E_{\bar{v},0,3} = \frac{\hbar^2 3(3+1)}{2\Theta_{\text{eff}}(\bar{v},0)} ,$$

$$(A, II, 39b) \quad \Delta E_{\bar{v},1,3} = \frac{\hbar^2 \{3(3+1)-2\}}{2\Theta_{\text{eff}}(\bar{v},1)} .$$

d) Angabe der in erster Ordnung gestörten Wellenfunktion

Wie nach Kenntnis der Matrixelemente von H_C leicht einzusehen ist, erhalten wir nach kurzer in C, IV durchgeführter Rechnung für die gestörte Wellenfunktion $\psi_{\bar{v},\bar{K},3}^{(1)}$ für Banden mit $\bar{K} \neq 0, \frac{1}{2}$:

$$(A, II, 40) \quad \begin{aligned} \psi_{\bar{v},\bar{K},3}^{(1)} &= |\bar{v}, 3, M, \bar{K}\rangle + \\ &+ \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{\sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)}}{\sum_v} \frac{\langle \psi_{v,\bar{K}-1}^{(3)} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},\bar{K}} \rangle}{E_{v,\bar{K}-1} - E_{\bar{v},\bar{K}}} |\bar{v}, 3, M, \bar{K}-1\rangle - \\ &- \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{\sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)}}{\sum_v} \frac{\langle \psi_{v,\bar{K}+1}^{(3)} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},\bar{K}} \rangle}{E_{v,\bar{K}+1} - E_{\bar{v},\bar{K}}} |\bar{v}, 3, M, \bar{K}+1\rangle . \end{aligned}$$

Für $\bar{K}=\frac{1}{2}$ -Banden ergibt sich

$$(A, II, 41) \quad \begin{aligned} \psi_{\bar{v},\frac{1}{2},3}^{(1)} &= |\bar{v}, 3, M, \frac{1}{2}\rangle + \\ &+ \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{3+N-\frac{1}{2}} (3+\frac{1}{2}) \sum_{v \neq \bar{v}} \frac{\langle \psi_{v,\frac{1}{2}}^{(3)} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}} \rangle}{E_{v,\frac{1}{2}} - E_{\bar{v},\frac{1}{2}}} |\bar{v}, 3, M, \frac{1}{2}\rangle - \\ &- \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{\sqrt{(3-\frac{1}{2})(3+\frac{3}{2})}}{\sum_v} \frac{\langle \psi_{v,\frac{3}{2}}^{(3)} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}} \rangle}{E_{v,\frac{3}{2}} - E_{\bar{v},\frac{1}{2}}} |\bar{v}, 3, M, \frac{3}{2}\rangle \end{aligned}$$

und für $\bar{K}=0$ -Banden erhalten wir :

$$(A, II, 42) \quad \begin{aligned} \psi_{\bar{v},0,3}^{(1)} &= |\bar{v}, 3, M, 0\rangle - \\ &- \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{\sqrt{3(3+1)}}{\sum_v} \frac{\langle \psi_{v,1}^{(3)} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},0}^{(3)} \rangle}{E_{v,1} - E_{\bar{v},0}} |\bar{v}, 3, M, 1\rangle . \end{aligned}$$

Die Parität von $\Psi_{\tilde{\nu}, \tilde{k}, \tilde{z}}^{(1)}$ ist stets gleich der der Basisfunktion $|\tilde{\nu}, J, M, K\rangle$, da H_C als mit dem Paritätsoperator vertauschender Operator Basisfunktionen verschiedener Parität nicht mischt. Damit ist letztlich die Parität der auf $\Psi_{\tilde{\nu}, \tilde{k}}$ aufbauenden Rotationsbande durch die von $\Psi_{\tilde{\nu}, \tilde{k}}$ gegeben.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen sollen nun die berechneten Formeln auf u-g-, g-u- und u-u-Kerne angewendet werden, wobei zunächst die Außenteilchenwellenfunktionen $\Psi_{\nu, K}$ und -Energien $E_{\nu, K}$ zu bestimmen sind.

III. Anwendung der Modellrechnungen auf u-g- und g-u-Kerne und Vergleich mit dem experimentellen Material

Bei der Anwendung unseres Modells auf u-g- oder g-u-Kerne haben wir nur ein unpaariges Außenteilchen, das mit auf das rumpffeste Koordinatensystem bezogenen Polarkoordinaten r, ϑ, φ beschrieben wird und sich im deformierten Potential des Rumpfes bewegt. Die Restwechselwirkung V_{PN} entfällt, J und K sind halbzahlige. Der Hamiltonoperator H_I hat in diesem Fall die folgende Form :

$$(A, III, 1) \quad H_I = -\frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta + V_N(r) + \frac{1}{2\Theta_0} (\underline{j}^2 - j_3^2)$$

Dabei ist $V_N(r)$ das übliche Nilssonpotential mit l^2 - und Spin-Bahn-Term :

$$(A, III, 2) \quad V_N(r) = \frac{1}{2} m_R (\omega_0^2(\beta) (1 - \frac{4}{3 \cdot 18} \sqrt{\frac{11}{5}} \beta Y_0^2(\vartheta, \varphi)) r^2) + C \underline{l} \cdot \underline{s} + D \underline{l}^2$$

β ist der Deformationsparameter, C die Spin-Bahn-Konstante, D die l^2 -Konstante. $\omega_0(\beta)$ ist eine nur von der Kernmassenzahl abhängige Funktion.

Mit einer Basis aus orthonormierten Oszillatorfunktionen mit Spinanteil, die alle zur gleichen Oszillatorschale mit Hauptquantenzahl N gehören, und die wir hier mit $R_{n,l}^N(r) Y_{K,\tau}^l(\vartheta, \varphi) \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}}$ ($\tau = \pm \frac{1}{2}$) bezeichnen, wird H_I diagonalisiert, wobei die über den Term $r^2 Y_0^2$ mögliche Kopplung in andere Oszillatorschalen mit $N' = N \pm 2$ vernachlässigt wird. Im Gegensatz zu den Nilssonschen Originalarbeiten, [12], die den Term $\frac{1}{2\Theta_0} (\underline{j}^2 - j_3^2)$ nicht berücksichtigen, diagonalisieren wir diesen Term gleich mit. Die aus der Diagonalisierung resultierende Wellenfunktion $\Psi_{\nu,K}$ ist Eigenfunktion zu H_I mit der Quantenzahl ν (gegeben durch $N, |K|$ und die Energie) und zu dem damit vertauschenden Operator j_3 mit der Quantenzahl K . Sie hat die Parität $(-1)^N$ und die folgende Gestalt :

$$(A, III, 3) \quad \Psi_{\nu,K} = \sum_{\ell, \tau} N_{\ell, \tau}^{\nu, K} R_{n, \ell}^N Y_{K, \tau}^{\ell} \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}},$$

wobei $N_{\nu, \kappa}^{\nu, \kappa}$ die aus der Diagonalisierung ermittelten Nilssonkoeffizienten sind. Da H_I nicht nur mit j_3 sondern auch mit j_3^2 vertauscht, sind die linear unabhängigen Eigenfunktionen $\Psi_{\nu, \kappa}$ und $\Psi_{\nu, -\kappa}$ zur Energie $E_{\nu, |\kappa|}$ entartet.

Die in H_I eingehenden freien Parameter Θ_0 = Trägheitsmoment des Rumpfes und β = Deformation des Rumpfes (- C und D sind von vorneherein durch Nilsson für alle Kerne festgelegt -) werden gleich den Werten des zu dem betreffenden u-g- bzw. g-u-Kern gehörigen g-g-Kerns gesetzt. Dabei wurde Θ_0 aus der Energie des 2^+ -Niveaus der Grundzustandsrotationsbande des g-g-Kerns und β aus dem E2-Übergang von $2^+ \rightarrow 0^+$ in dieser Bande nach der in B, XI hergeleiteten Formel berechnet. Mit so festgelegtem H_I werden durch numerische Diagonalisierung die Energien $E_{\nu, \kappa}$ und Wellenfunktionen $\Psi_{\nu, \kappa}$ bestimmt und stehen für die Berechnung der Störenergien von H_C und H_A zur Verfügung.

Betrachten wir zunächst Banden mit $\bar{\kappa} \neq \frac{1}{2}$. In diesen Fällen hatten wir für die Energie des Bandenkopfs $E_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}, \bar{\kappa}}$ der auf die Außenteilchenwellenfunktion $\Psi_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}}$ aufbauenden Rotationsbande aus (A, II, 23) erhalten :

$$(A, III, 4) \quad E_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}, \bar{\kappa}} = E_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}} + \frac{\hbar^2 \bar{\kappa}}{2 \Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\nu} \frac{|\langle \Psi_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}-1} | j_{-1} | \Psi_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}} \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{\kappa}}} \right).$$

Für die Grundzustandsbande ist dieses der Energienullpunkt. Wir könnten im Prinzip mit obiger Formel die Abstände zwischen den Bandenköpfen beliebiger Rotationsbanden und dem der Grundzustandsrotationsbande ausrechnen. Ein Vergleich der berechneten Energien mit den experimentellen kann jedoch wegen der geringen Größe des zweiten, von der Störungsrechnung herkommenden Terms gegenüber den Nilssonenergien i.a. nur geringe Aufschlüsse über die Güte dieses Terms geben, da bereits die Nilssonenergien oftmals erheblich von den experimentellen Einteilchenenergien abweichen.

Um unsere störungstheoretischen Überlegungen zu prüfen,

haben wir als zweite Möglichkeit die Formel über den Energieabstand eines Niveaus der Rotationsbande vom Bandenkopf (A, II, 24) ≡

$$(A, III, 5) \quad \Delta E_{\bar{v}, \bar{k}, J} = \frac{\hbar^2}{2 \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})} \{ J(J+1) - \bar{k}(\bar{k}+1) \}$$

mit

$$(A, III, 6) \quad \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k}) = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \left(\frac{|\langle \psi_{v, \bar{k}-1} | \hat{S}_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{v, \bar{k}-1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} + \frac{|\langle \psi_{v, \bar{k}+1} | \hat{S}_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{v, \bar{k}+1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} \right) \right)^{-1}.$$

Wie wir aus (A, III, 5) ersehen, ist $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})^{-1}$ die Steigung der Geraden $\Delta E_{\bar{v}, \bar{k}, J} (J(J+1))$ (wenn $J(J+1)$ als kontinuierliche Variable angesehen wird). Störungsrechnung höherer Ordnung würde im Gegensatz zu den von Ruder in [8] für g-g-Kerne gemachten Überlegungen zusätzliche Energiebeiträge liefern, die linear in $J(J+1)$ sind. Da diese jedoch mit $(\Theta_0)^{-4}$ und noch tieferen Potenzen von Θ_0 behaftet sind und außerdem höhere Potenzen der Matrixelemente und des Energienenners als 4 bzw. 3 auftreten würden, können diese Beiträge zur Energie und zu Θ_{eff} im allgemeinen vernachlässigt werden, was im Einzelfall jedoch nachgeprüft werden muß. Demzufolge ist die Steigung der Kurve $\Delta E_{\bar{v}, \bar{k}, J, \text{theo}} (J(J+1))$ im Punkte $J = \bar{k}$ im wesentlichen durch obiges mit Störungsrechnung zweiter Ordnung ermitteltes $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})^{-1}$ gegeben. Durch Berechnung der Steigung der experimentellen Kurve $\Delta E_{\bar{v}, \bar{k}, J, \text{exp}} (J(J+1))$ für $J = \bar{k}$ kann $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})_{\text{exp}}^{-1}$ ermittelt und mit dem theoretischen Wert verglichen werden.

Zur Berechnung des theoretischen Werts von $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})$ für die auf das Niveaus $\psi_{\bar{v}, \bar{k}}$ aufbauende Rotationsbande ist zu beachten, daß wir in obigen Summen nur solche Niveaus $\psi_{v, \bar{k} \pm 1}$ zulassen, deren Energie größer ist als die Energie des Grundzustandsniveaus des betrachteten u-g- bzw. g-g-Kerns, da alle tieferen Niveaus bereits von Nukleonen des Rumpfs besetzt sind und wir den Rumpf bei unseren Rech-

nungen stets als unveränderlich vorgeben. Mittels Computer werden die auftretenden Matrixelemente ausgewählt und nach Formeln aus C,V berechnet. Damit wird dann $\tilde{\omega}_{\text{eff}}(\tilde{Y}, \tilde{K})$ für die Rotationsbanden verschiedener u-g- und g-u-Kerne ermittelt.

Die Ergebnisse für $\tilde{\omega}_{\text{eff}}$ hängen entscheidend von den verwendeten Außenteilchenwellenfunktionen und -Energien ab. Deshalb kann unser Modell mit Aussicht auf Erfolg nur auf solche u-g- und g-u-Kerne angewendet werden, deren experimentelles Anregungsniveauschema einigermaßen gut mit dem Nilssonmodell wiedergegeben wird, zumindest für die Niveaus, die mit dem Ausgangsniveau über j_{+1} und j_{-1} die entscheidenden Matrixelemente liefern. Daß es solche Kerne gibt, zeigen einige charakteristische Beispiele.

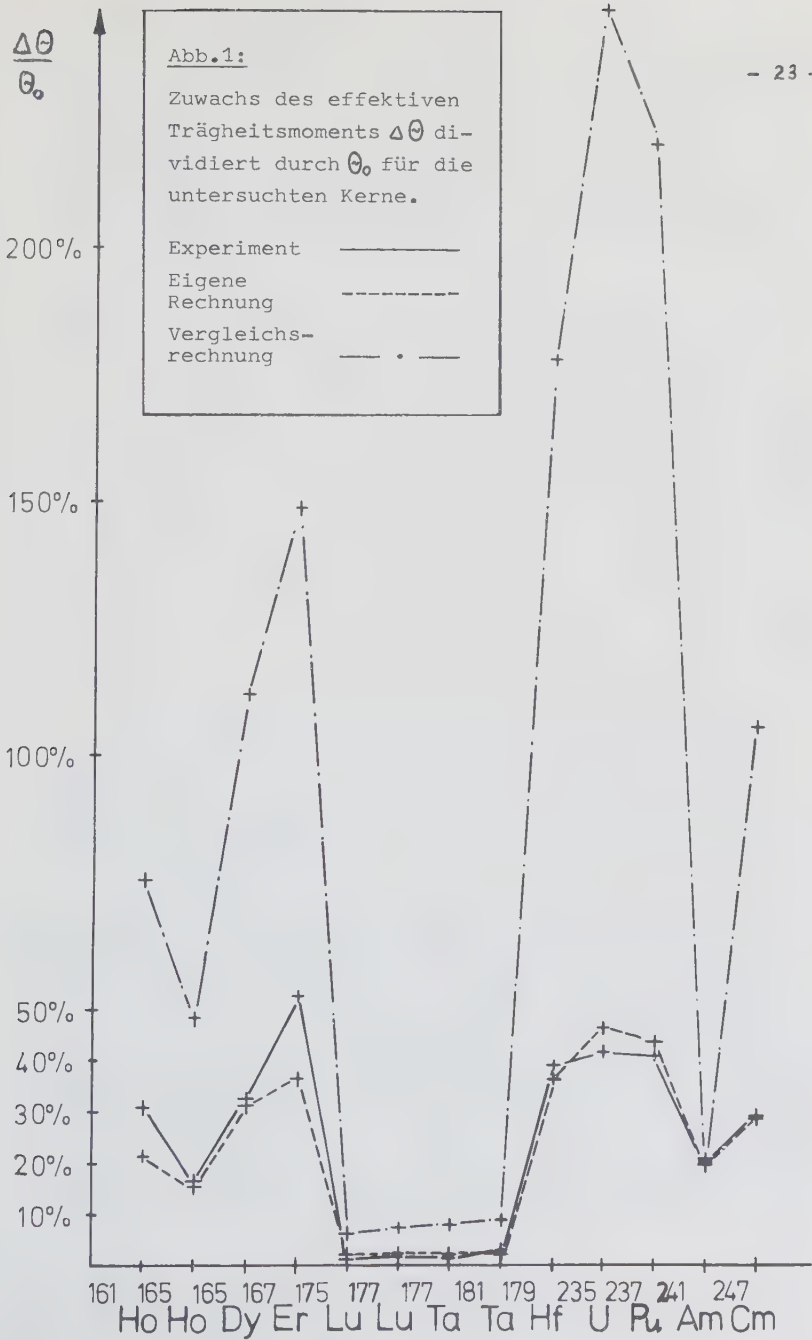
Betrachten wir etwa die Kerne ^{165}Dy und ^{165}Ho , deren Grundzustände die Quantenzahlen $\frac{7}{2}^{+}$ bzw. $\frac{7}{2}^{-}$ haben. Die ersten damit koppelnden Niveaus wären nach Nilsson solche mit $\frac{9}{2}^{+}$ bzw. $\frac{9}{2}^{-}$. In dem experimentell untersuchten Bereich unterhalb 1000 KeV wurden derartige Zustände nicht gefunden [13]. Aus dem Nilsson-schema würde man auf eine Lage bei etwa 1700 KeV schließen. Hier haben wir also einen Fall, an dem wir prüfen können, ob unsere Rechnung stimmt.

Anders ist es beim Kern ^{157}Tb . Hier sind die mit dem Grundzustand koppelnden experimentellen Niveaus durchaus bekannt, stimmen aber gar nicht mit denjenigen des Nilsson-schemas überein. Beispielsweise liegt das experimentelle $\frac{5}{2}^{+}$ Niveau höher, das theoretische $\frac{5}{2}^{+}$ Niveau tiefer als der Grundzustand. Wenn wir in einem solchen Fall mit den Nilssonwellenfunktionen und -Energien arbeiten, werden wir nicht überrascht sein, wenn der Wert für $\tilde{\omega}_{\text{eff}}$ nicht mit dem Experiment übereinstimmt.

Bei der Auswahl der Kerne, auf die unser Modell angewendet wurde, wurden diese Gesichtspunkte berücksichtigt. In Abb.1 zeigt die gestrichelte Kurve die Ergebnisse unserer Rechnungen, wobei der Unterschied $\Delta\tilde{\omega}$ zwischen $\tilde{\omega}_{\text{eff}}$ und $\tilde{\omega}_0$ dividiert durch $\tilde{\omega}_0$ für die Grundzustandsrotationsbanden von 13 Kernen aufgetragen wurde. Die durchgezogene Kurve zeigt die zugehörigen experimentellen Werte [13] und wir erkennen,

Abb.1:

Zuwachs des effektiven
Trägheitsmoments $\Delta\Theta$ di-
vidiert durch Θ_0 für die
untersuchten Kerne.



daß über den gesamten Bereich hinweg eine Übereinstimmung besteht, wie sie besser kaum erwartet werden kann.

Schon Prior hat in [7] qualitativ ähnliche Ergebnisse erzielt. Er hat dabei jedoch

a) seinen Rechnungen für das Zusatzträgheitsmoment infolge eines Rechenfehlers einen Ausdruck verwendet, welcher der Inglisformel entspricht. Nach Ruder [8] stimmt diese jedoch nur für $\Theta_0 \rightarrow \infty$ mit der unsrigen überein und ist nur dort richtig.

b) bei den durchzuführenden Summationen alle und zwar auch die von Nukleonen des Rumpfes besetzten Niveaus mitgenommen. Wenn man aber die richtige Formel für Θ_{eff} nimmt und die Summation sowie bei Prior durchführt, so ergibt sich die in Abb.1 strichpunktiert eingetragene Kurve. Die relativ gute Übereinstimmung bei Prior kommt offenbar dadurch zustande, daß sich die beiden genannten Fehler in etwa kompensieren.

Auch für die bislang nicht behandelten $\bar{K}=\frac{1}{2}$ -Banden, bei denen wegen des auftretenden decoupling-Parameters die Extraktion des effektiven Trägheitsmoments erschwert wird, ergeben sich, wie Rechnungen für die Kerne ^{171}Tm , ^{169}Tm und ^{167}Tm zeigen, Ergebnisse, die gut bis befriedigend mit den experimentellen Daten übereinstimmen.

Unser befriedigendes Ergebnis ist im übrigen ein Argument dafür, daß das Nilssonmodell mit seinen Wellenfunktionen und Energien ein recht brauchbares Bild für die betreffenden Kerne darstellt. Die noch verbleibenden Diskrepanzen zwischen unseren Rechnungen und dem Experiment sind naturgemäß darauf zurückzuführen, daß das Nilssonmodell doch nur annähernd das experimentelle Einteilchenenergiespektrum wiedergibt. Bereits die Mitnahme eines γ_0^4 -Terms im Potential kann, wie die Arbeiten von Näpfel [14] und Gustafsson et al. [15] zeigen, das theoretische Einteilchenenergiespektrum bereits entscheidend verbessern. Außerdem geben die Arbeiten von Gareev et al. [16] Anlaß zu der Erwartung, daß durch Verwendung eines deformierten Saxon-Woods-Potentials weitere Verbesserungen möglich sind.

Wir können ferner schließen, daß für u-g- und g-u-Kerne

ein Modell mit praktisch unverändertem g-g-Rumpf und zusätzlichem Außenteilchen eine gute Beschreibung darstellt und daß im jetzigen Stadium der Untersuchungen kein Grund dafür gegeben ist, die verbleibenden Diskrepanzen auf Rumpfpolarisation o. ä. zurückzuführen.

IV. Anwendung der Modellrechnungen auf u-u-Kerne und Vergleich mit dem experimentellen Material

1. Allgemeine Betrachtung von H_I

Während bei u-g- und g-u-Kernen die Wellenfunktionen und Energien von H_I exakt bestimmt werden konnten, ist dies bei u-u-Kernen wegen der Restwechselwirkung V_{PN} und einer zusätzlichen Drehimpulskopplung ohne allzugroßen Aufwand nur näherungsweise möglich.

Der Hamiltonoperator H_I hat nach (A,I,5) im Fall zweier Außenteilchen P und N die folgende Form :

$$(A, IV, 1) \quad H_I = -\frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta_P + V_N(r_P) - \frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta_N + V_N(r_N) + V_{PN} + \frac{1}{2\Theta_0} \{(\dot{j}_P + \dot{j}_N)^2 - (\dot{j}_{P3} + \dot{j}_{N3})^2\}.$$

Dabei ist V_N das in A,III verwendete Nilssonpotential mit $\frac{1}{2}^2$ - und Spin-Bahn-Term. Wegen

$$(A, IV, 2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\Theta_0} \{(\dot{j}_P + \dot{j}_N)^2 + (\dot{j}_{P3} + \dot{j}_{N3})^2\} = \\ & = \frac{1}{2\Theta_0} (\dot{j}_P^2 - \dot{j}_{P3}^2) + \frac{1}{2\Theta_0} (\dot{j}_N^2 - \dot{j}_{N3}^2) - \frac{1}{\Theta_0} (\dot{j}_{P+1} \dot{j}_{N-1} + \dot{j}_{N+1} \dot{j}_{P-1}) \end{aligned}$$

läßt sich H_I wie folgt schreiben :

$$(A, IV, 3) \quad H_I = H_{I0} + H_{I1}.$$

Dabei ist

$$(A, IV, 4) \quad \begin{aligned} H_{I0} &= -\frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta_P + V_N(r_P) + \frac{1}{2\Theta_0} (\dot{j}_P^2 - \dot{j}_{P3}^2) - \frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta_N + V_N(r_N) + \frac{1}{2\Theta_0} (\dot{j}_N^2 - \dot{j}_{N3}^2) = \\ &= H_{IP} + H_{IN} \end{aligned}$$

die Summe eines Protonen- und eines Neutronenanteils, die beide die gleiche Form wie H_I aus A,III haben. Der Ausdruck

$$(A, IV, 5) \quad H_{I1} = V_{PN} - \frac{1}{\Theta_0} (\dot{j}_{P+1} \dot{j}_{N-1} + \dot{j}_{P-1} \dot{j}_{N+1}) = V_{PN} + C_{PN}$$

stellt die Kopplung zwischen Proton und Neutron dar. Wir werden ihn als zu H_{IO} hinzutretenden Störterm behandeln.

Es sollen zunächst die Eigenschaften der Wellenfunktionen und Energien von H_{IO} diskutiert werden. Die Lösungen von H_{IO} sind Produkte aus je einer Protonenfunktion Ψ_{ν_p, Ω_p}^P und einer Neutronenfunktion Ψ_{ν_N, Ω_N}^N :

$$(A, IV, 6) \quad \Psi_{\nu, k}^0 = \Psi_{\nu_p, \Omega_p}^P \Psi_{\nu_N, \Omega_N}^N, \quad k = \Omega_p + \Omega_N, \quad \nu = (\nu_p, \nu_N)$$

mit der Energie

$$(A, IV, 7) \quad E_{\nu, k}^0 = E_{\nu_p, \Omega_p} + E_{\nu_N, \Omega_N}.$$

Da die Protonen- und Neutronenwellenfunktionen bezüglich $\pm \Omega_p$ bzw. $\pm \Omega_N$ entartet sind, erhält man zur Energie $E_{\nu_p, |\Omega_p|} + E_{\nu_N, |\Omega_N|}$ vier entartete linear unabhängige Wellenfunktionen $\Psi_{\nu, \pm K_S}$ und $\Psi_{\nu, \pm K_D}$, wobei K_S und K_D durch

$$(A, IV, 8) \quad K_S = |\Omega_p| + |\Omega_N|; \quad K_D = ||\Omega_p| - |\Omega_N||$$

gegeben sind. Außer im Fall $K_D = 0$ (für K_S gilt stets $K_S \neq 0$) haben also die vier Wellenfunktionen die vier verschiedenen Eigenwerte $\pm K_S$, $\pm K_D$ zu $j_z = j_{pz} + j_{Nz}$. Da sowohl H_{IO} als auch H_{I1} mit j_z vertauschen, können wir mit den nach Eigenwerten zu j_z klassifizierten Eigenfunktionen trotz der vorliegenden Entartung den Term H_{I1} mit Störungsrechnung ohne Entartung behandeln.

Im Fall $K_D = 0$ muß, wie aus A, II hervorgeht, wegen der R_1 -Symmetrie des Gesamtproblems die Wellenfunktion von H_I bereits Eigenfunktion von R_1 sein. Mit dem einfachen Produktansatz (A, IV, 6) würden wir jedoch zwei Wellenfunktionen

$$(A, IV, 10a) \quad \Psi_{\nu, 0, 1}^0 = \Psi_{\nu_p, |\Omega_p|}^P \Psi_{\nu_N, -|\Omega_N|}^N \quad \text{mit} \quad |\Omega_p| = |\Omega_N|$$

und

$$(A, IV, 10b) \quad \Psi_{\nu, 0, 2}^0 = \Psi_{\nu_p, -|\Omega_p|}^P \Psi_{\nu_N, |\Omega_N|}^N \quad \text{mit} \quad |\Omega_p| = |\Omega_N|$$

erhalten, auf die R_1 wie folgt wirkt :

$$(A, IV, 11) \quad R_1 \Psi_{v,0,1}^0 = (-1)^i \sum^{(N_i - \frac{1}{2})} \Psi_{v,0,1}^0 .$$

Es lassen sich jedoch sofort zwei neue Wellenfunktionen aus $\Psi_{v,0,1}^0$ und $\Psi_{v,0,2}^0$ linear kombinieren, die die Form

$$(A, IV, 12a) \quad \Psi_{v,0}^+ = \Psi_{v,0,1}^0 + (-1)^i \sum^{(N_i - \frac{1}{2})} \Psi_{v,0,2}^0$$

$$(A, IV, 12b) \quad \Psi_{v,0}^- = \Psi_{v,0,1}^0 - (-1)^i \sum^{(N_i - \frac{1}{2})} \Psi_{v,0,2}^0$$

haben und für die gilt :

$$(A, IV, 13) \quad R_1 \Psi_{v,\pm,0}^0 = \pm \Psi_{v,\pm,0}^0, \quad \langle \Psi_{v,\pm,0}^0 | \Psi_{v,\pm,0}^0 \rangle = 2.$$

$\Psi_{v,0}^+$ und $\Psi_{v,0}^-$ haben also das gewünschte Verhalten bezüglich R_1 . Da H_{I1} mit R_1 vertauscht, können wir mit den zu $K_D = 0$ gehörigen und nach R_1 klassifizierten Wellenfunktionen $\Psi_{v,0}^+$ und $\Psi_{v,0}^-$ wieder Störungsrechnung ohne Entartung von H_{I1} betreiben.

Die in den vorangegangenen Absätzen gebrachte Behandlung des Störterms H_{I1} hat das gleiche Ergebnis wie Störungsrechnung mit Entartung für den Term H_{I1} . Eine solche Rechnung liefert nämlich für die gestörten Wellenfunktionen wieder die bereits richtig symmetrisierten Ausgangswellenfunktionen (A, IV, 6) für $K \neq 0$ und (A, IV, 12a) sowie (A, IV, 12b) für $K=0$. Für die dazugehörigen Energiewerte erhalten wir :

$$(A, IV, 14a) \quad E_{v,K}^1 = E_{v,K}^0 + \langle \Psi_{v,K}^0 | H_{I1} | \Psi_{v,K}^0 \rangle \quad \text{für } K \neq 0$$

$$(A, IV, 14b) \quad E_{v,\pm,0}^1 = E_{v,0}^0 + \frac{1}{2} \langle \Psi_{v,\pm,0}^0 | H_{I1} | \Psi_{v,\pm,0}^0 \rangle \quad \text{für } K=0.$$

Wenn H_{I1} also nichtverschwindende und für die betreffenden Wellenfunktionen verschiedene Diagonalelemente liefert, dann ist die störende Entartung zwischen $\Psi_{v,\pm,K_S}^0$ und $\Psi_{v,\pm,K_D}^0$ sowie zwischen $\Psi_{v,0}^+$ und $\Psi_{v,0}^-$ aufgehoben. Im nächsten Abschnitt

sollen deshalb die Eigenschaften der Diagonalelemente von H_{I1} betrachtet werden.

2. Untersuchung der Diagonalelemente von H_{I1} und Diskussion der in H_{I1} enthaltenen Restwechselwirkung V_{PN}

Wie aus (A, IV, 5) hervorgeht, enthält H_{I1} neben der Restwechselwirkung V_{PN} einen Kopplungsterm C_{PN} , der zunächst untersucht werden soll. Aus der in C, VI durchgeführten Rechnung entnehmen wir, daß C_{PN} im Fall $K_D = 0$, $|\Omega_P| = |\Omega_N| = \frac{1}{2}$ einen für $\Psi_{\vec{r},0}^+$ und $\Psi_{\vec{r},0}^-$ verschiedenen Beitrag $C_C(\vec{r}^\pm)$ mit

$$(A, IV, 15) \quad C_C(\vec{r}^\pm) = \mp \frac{2}{\Theta_0} a_P(\vec{r}_P, \frac{1}{2}) a_N(\vec{r}_N, \frac{1}{2})$$

liefert und für alle andere Fälle verschwindet.

Für die Restwechselwirkung V_{PN} wollen wir zunächst einige qualitative Aussagen machen, dann aber auch die Ergebnisse von Rechnungen mit Ansätzen für V_{PN} mit dem experimentellen Material vergleichen.

a) Qualitative Aussagen über V_{PN}

Wir wollen zunächst folgenden Ansatz von V_{PN} diskutieren :

$$(A, IV, 16) \quad V_{PN} = V_0 f(|\vec{r}_P - \vec{r}_N|) (1 - \alpha + \frac{\alpha}{\hbar} \vec{S}_P \cdot \vec{S}_N) .$$

Dabei ist $f(|\vec{r}_P - \vec{r}_N|)$ eine nur vom Abstand Proton-Neutron abhängige Ortsfunktion, V_0 der Stärkeparameter, α der Parameter des Spin-Spin-Terms. Als Ortsabhängigkeit wollen wir, wie schon von Newby [17] vorgeschlagen, eine Gaußfunktion verwenden und die Ergebnisse mit der von uns in [11] verwendeten δ -funktionsförmigen Ortsabhängigkeit vergleichen.

Wie wir in [11] gezeigt haben, lassen sich für eine durch (A, IV, 16) gegebene Restwechselwirkung einige allgemeine qualitative Aussagen machen.

Für alle vier Wellenfunktionen, die aus den gleichen

Protonen- und Neutronenniveaus zusammengesetzt werden können, - nur diese sind bezüglich H_{IO} entartet - ergibt eine reine Ortswechselwirkung ($\alpha=0$) stets das gleiche Matrixelement $V_A(\Psi)$. Für den reinen Spin-Spin-Term ($\alpha=1$) erhalten wir bei $K_D \neq 0$ für $\Psi_{\nu, \pm K_S}^0$ das Diagonalelement $V_B(\Psi)$ und für $\Psi_{\nu, \pm K_D}^0$ das Diagonalelement $-V_B(\Psi)$. Die Entartung zwischen $\Psi_{\nu, +K_D}^0$ und $\Psi_{\nu, +K_S}^0$ bzw. zwischen $\Psi_{\nu, -K_D}^0$ und $\Psi_{\nu, -K_S}^0$ wird also aufgehoben.

Im Fall $K_D = 0$ erhalten wir für $\Psi_{\nu, +0}^0$ und $\Psi_{\nu, -0}^0$ verschiedene Diagonalelemente $-V_B(\Psi) + V_C(\Psi^{\pm})$. Da auf Grund der Symmetrieforderung bezüglich des Operators R_1 die Wellenfunktion $\Psi_{\nu, +0}^0$ nur bei geraden J-Werten, $\Psi_{\nu, -0}^0$ nur bei ungeraden J-Werten zur Basisfunktion beiträgt, ergeben sich auf Grund der Terme $C_C(\Psi^{\pm})$ und $V_C(\Psi^{\pm})$ zwei um einen konstanten Energiebetrag gegeneinander versetzte Rotationsbanden mit entweder nur geraden oder nur ungeraden J-Werten. Wenn das Trägheitsmoment dieser Banden gleich ist, was bei kleinem $C_C(\Psi^{\pm})$ und $V_C(\Psi^{\pm})$ in guter Näherung erfüllt ist, können wir sie als Teilbanden einer $K_D=0$ -Rotationsbande auffassen, in der die Niveaus mit geradem J gegenüber denen mit ungeradem J durch einen konstanten odd-even-shift gegeneinander versetzt sind. Die Abb.2 soll die eben geschilderten Aussagen über die Wirkung von V_{PN} veranschaulichen.

b) Vergleich mit dem experimentellen Material

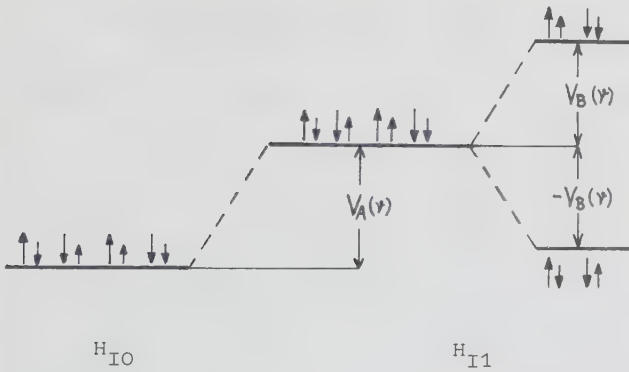
Die Beiträge von V_{PN} sind, wie aus (A,IV,14a) und (A,IV,14b) hervorgeht, in den Energien von H_I enthalten, welche die Energien des Gesamtproblems ohne die Rotationsbeiträge darstellen. Da die Banden des experimentellen Spektrums vielfach auf von Null verschiedenen $J=\bar{K}$ -Werten aufbauen, sind diese Energien nicht unmittelbar mit den experimentellen Werten der entsprechenden Bandenköpfe zu vergleichen, da darin auch die Rotationsenergien enthalten sind.

Faßt man das Reziproke des Trägheitsmoments der betrachteten Bande einfach als "Rotationsparameter" auf, der für jede Bande gefittet wird, so ergibt sich,

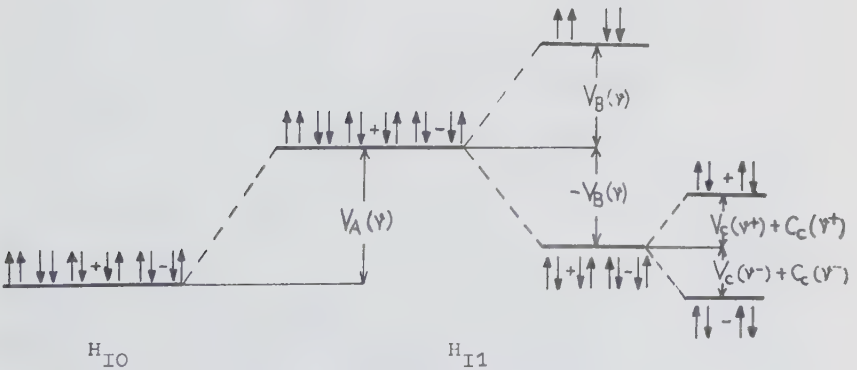
Abb.2: Schematische Darstellung der Wirkung von H_{I1} für die Fälle $K_D \neq 0$ und $K_D = 0$.

Dabei bedeuten :

$$\psi_{y,K_D} = \uparrow\downarrow, \psi_{y,-K_D} = \downarrow\uparrow, \psi_{y,K_S} = \uparrow\uparrow, \psi_{y,-K_S} = \downarrow\downarrow, \psi_{y,0} = \uparrow\downarrow \pm \downarrow\uparrow$$



Wirkung von H_{I1} im Fall $K_D \neq 0$



Wirkung von H_{I1} im Fall $K_D = 0$

wie aus der Literatur z.B. aus [18] zu ersehen ist, für die Rotationsenergie des Bandenkopfs :

$$(A, IV, 17) \quad E_{\text{Rot}}(1) = \frac{\hbar^2 \bar{K}}{2 \Theta_{\text{uu}}(\bar{v}, \bar{K})} ,$$

Die von uns in A,II durchgeführte Störungsrechnung liefert jedoch den Ausdruck

$$(A, IV, 18) \quad E_{\text{Rot}}(2) = \frac{\hbar^2 \bar{K}}{2 \Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\bar{v}} \frac{| \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{K}-1}^0 | \hat{J}_z | \Psi_{\bar{v}, \bar{K}}^0 \rangle |^2}{E_{\bar{v}, \bar{K}-1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} \right) ,$$

der durchaus von (A,IV,17) verschiedene Ergebnisse liefern kann.

Die Differenz zwischen der experimentellen Energie des Bandenkopfs und der durch (A,IV,17) oder (A,IV,18) gegebenen Rotationsenergie ergibt dann die experimentelle bestimmte Energie $E_{\bar{v}, \bar{K}, \text{exp}}$ des der betreffenden Rotationsbande zugrundeliegenden Zustands von H_I . Die entsprechende theoretische Energie enthält, wie aus (A,IV,14a) und (A,IV,14b) hervorgeht, die Nilssonenergien von Proton und Neutron und die Diagonalelemente von C_{PN} und V_{PN} . Bei der Berechnung der Energieabstände der Bandenköpfe verschiedener Rotationsbanden treten dann wieder Differenzen von Nilssonenergien auf, es sei denn, wir betrachten die Abstände der Bandenköpfe zusammengehöriger $\bar{K}_S$ - und $\bar{K}_D$ -Banden, die sich auf die gleichen Nilssonniveaus aufbauen, oder den odd-even-shift in der $\bar{K}_D=0$ -Bande. Genau diesen Spezialfällen wollen wir uns jedoch im folgenden zuwenden, da nur so eine Untersuchung der Wirkung von H_{I1} und der darin enthaltenen Restwechselwirkung V_{PN} möglich ist, die nicht durch die schon in A,III erläuterten Diskrepanzen zwischen den experimentellen Einteilchenenergien und denen des Nilssonmodells beeinträchtigt wird.

Aus den experimentell gemessenen Rotationsbanden der Kerne ^{158}Tb [19], ^{164}Ho [20], ^{166}Ho [21], ^{168}Tm [22], ^{170}Tm [23], ^{170}Lu [24], ^{174}Lu [25], ^{176}Lu [26], ^{182}Ta [27], und ^{186}Re [28] wurden nun die Energieabstände Δ_{exp} zwischen den Niveaus $\Psi_{\bar{v}, \bar{K}_S}^0$ und $\Psi_{\bar{v}, \bar{K}_D}^0$ unter Benützung von (A,IV,17) oder (A,IV,18)

ermittelt und mit der Kennzeichnung (1) oder (2) in Tabelle 1 eingetragen. Dabei konnte die Formel (A,IV,18) nur in den Fällen angewendet werden, in denen die eingehenden Außen-
teilchenwellenfunktionen und Energien einigermaßen gut durch das Nilssonmodell wiedergegeben werden. (Die gleiche Forderung wurde schon in A,III bei der Berechnung von C_{eff} gemacht.) Die von uns nach (A,IV,17) ermittelten Werte stimmen zumindest für den Teil der Rotationsbanden, die auch Jones et al. in [18] behandeln, recht gut mit denen von Jones überein. Verwendung der exakten Formel (A,IV,18) führt in einigen Fällen jedoch zu erheblichen Abweichungen.

Außerdem wurden für $\bar{K}_D=0$ -Banden der obigen Kerne die aus dem Experiment ermittelten Werte des von V_{PN} hervorgerufenen odd-even-shifts O_{exp} in Tabelle 2 eingetragen. (Bei den Kernen ^{168}Tm und ^{170}Tm wurde dies unter Berücksichtigung der nach (A,IV,15) berechneten Diagonalelemente von C_{PN} getan.)

Für die theoretische Behandlung benützten wir für V_{PN} den Ansatz (A,IV,16) mit einer gaußförmigen Ortsabhängigkeit. Wegen der Kompliziertheit der Berechnung der Diagonalelemente verließen wir uns nicht auf die für einen Teil der Kerne schon vorliegenden Ergebnisse (siehe z.B. Zitate [17] bis [28] sowie [23]) sondern führten die Berechnung unter Zuhilfenahme der in C,VIII bewiesenen Formeln auf völlig unabhängigem Weg neu durch. Wie in A,III wurden auch hier wieder die in H_{IO} eingehenden Werte Θ_0 und β gleich den Werten des dem betrachteten u-u-Kerns zugrundeliegenden g-g-Kerns gesetzt, so daß die Wellenfunktionen von H_{IO} ohne freie Parameter bestimmt sind.

Betrachten wir zunächst die Energiedifferenz Δ_{theo} zwischen den Niveaus ψ_{ν, K_S}^0 und ψ_{ν, K_D}^0 , die wir im folgenden kurz als K_S - K_D -Abstand bezeichnen. Dafür ist, wie aus A,IV,2a hervorgeht, bei dem von uns benützten Ansatz (A,IV,16) allein der mit dem Parameter $V_0\alpha$ behaftete Spin-Spin-Term verantwortlich. In Tabelle 1 wurden für Reichweiten $r_\beta=1.670$ fm (mit (r_{β_1}) bezeichnet) und $r_\beta=0.001$ fm (δ -funktionsartig, mit (δ) bezeichnet) die Werte für $V_0\alpha$ eingetragen, mit denen sich der experimentelle K_S - K_D -Abstand Δ_{exp} ergab. Wir stellen fest:

Tabelle 1: Vergleich der mit $(A, IV, 17) \equiv (1)$ und $(A, IV, 18) \equiv (2)$ ermittelten Werte für Δ_{exp} und Angabe der Parameter $V_0\alpha$, die bei $r_\beta = 1.67 \text{ fm} \equiv (r_{\beta_1})$ und $r_\beta = 0.001 \text{ fm} \equiv (\delta)$ die experimentellen Werte Δ_{exp} liefern.

Kern	Niveau		π_{K_S, K_D}	Δ_{exp}	$-V_0\alpha$	$-V_0\alpha$	Δ_{exp}	$-V_0\alpha$	$-V_0\alpha$
	Proton	Neutron		(1) in keV	(1)(r_{β_1}) in MeV	(1)(δ) in 10^{10} MeV	(2) in keV	(2)(r_{β_1}) in MeV	(2)(δ) in 10^{10} MeV
$^{158}_{65}\text{Tb}$	$411\frac{3}{2}$	$521\frac{3}{2}$	$3^-, 0^-$	-132	28.6	9.97			
	$411\frac{3}{2}$	$402\frac{3}{2}$	$3^+, 0^+$	107	19.6	7.84			
	$411\frac{3}{2}$	$400\frac{1}{2}$	$2^+, 1^+$	-139	24.0	14.2			
$^{164}_{67}\text{Ho}$	$523\frac{7}{2}$	$523\frac{5}{2}$	$6^+, 1^+$	146	26.5	7.50	129.4	23.5	6.64
	$523\frac{7}{2}$	$642\frac{5}{2}$	$6^-, 1^-$	-40	11.2	4.90			
	$523\frac{7}{2}$	$521\frac{3}{2}$	$5^+, 2^+$	-165	49.9	14.4	-183	54.4	15.9
	$523\frac{7}{2}$	$402\frac{3}{2}$	$5^-, 2^-$	88	25.7	13.5			
	$523\frac{7}{2}$	$400\frac{1}{2}$	$4^-, 3^-$	-101	33.6	17.6			
$^{166}_{67}\text{Ho}$	$523\frac{7}{2}$	$633\frac{7}{2}$	$7^-, 0^-$	-86	16.7	6.66	-107.4	20.9	8.35
	$523\frac{7}{2}$	$521\frac{1}{2}$	$4^+, 3^+$	168	41.4	15.1	164.4	40.6	14.8
$^{168}_{69}\text{Tm}$	$411\frac{1}{2}$	$521\frac{1}{2}$	$1^-, 0^-$	-195	47.8	15.9	-194.5	47.6	15.9
	$411\frac{1}{2}$	$512\frac{5}{2}$	$3^-, 2^-$	233	43.0	12.5	228.7	42.2	12.2
	$411\frac{1}{2}$	$633\frac{7}{2}$	$4^+, 3^+$	140	42.5	19.0	127.6	38.8	17.4
$^{170}_{69}\text{Tm}$	$411\frac{1}{2}$	$521\frac{1}{2}$	$1^-, 0^-$	-193	47.3	15.9	-191	46.9	15.7
	$411\frac{1}{2}$	$512\frac{5}{2}$	$3^-, 2^-$	232	42.8	12.5			
$^{170}_{71}\text{Lu}$	$404\frac{7}{2}$	$633\frac{7}{2}$	$7^+, 0^+$						

Tabelle 1: Fortsetzung

Kern	Niveau		π_{K_S, K_D}	Δ_{exp}	$-V_{O\alpha}$	$-V_{O\alpha}$	Δ_{exp}	$-V_{O\alpha}$	$-V_{O\alpha}$
	Proton	Neutron							
				(1) in keV	(1)(r_{β_1}) in MeV	(1)(δ) in 10^{10} MeV	(2) in keV	(2)(r_{β_1}) in MeV	(2)(δ) in 10^{10} MeV
$^{174}_{71}\text{Lu}$	$404\frac{7}{2}$	$633\frac{7}{2}$	$7^+, 0^+$	100	30.6	12.4			
	$402\frac{5}{2}$	$512\frac{5}{2}$	$5^-, 0^-$	-123	25.7	9.27			
	$404\frac{7}{2}$	$521\frac{3}{2}$	$5^-, 2^-$	88	35.0	16.3			
	$404\frac{7}{2}$	$521\frac{1}{2}$	$4^-, 3^-$	-77	30.4	14.9			
	$404\frac{7}{2}$	$512\frac{5}{2}$	$6^-, 1^-$	116	28.1	15.5			
$^{176}_{71}\text{Lu}$	$404\frac{7}{2}$	$514\frac{7}{2}$	$7^-, 0^-$	-254	43.3	18.2	-258	44.0	18.5
	$404\frac{7}{2}$	$510\frac{1}{2}$	$4^-, 3^-$	53	14.7	7.86			
$^{182}_{73}\text{Ta}$	$404\frac{7}{2}$	$510\frac{1}{2}$	$4^-, 3^-$	78	22.8	12.2			
	$404\frac{7}{2}$	$512\frac{3}{2}$	$5^-, 2^-$	-127	32.8	18.3			
	$404\frac{7}{2}$	$503\frac{7}{2}$	$7^-, 0^-$	114	16.4	7.66			
	$514\frac{9}{2}$	$510\frac{1}{2}$	$5^+, 4^+$	-123	30.3	12.0			
	$514\frac{9}{2}$	$512\frac{3}{2}$	$6^+, 3^+$	105	23.1	9.23			
	$514\frac{9}{2}$	$615\frac{11}{2}$	$10^-, 1^-$	-286	41.0	12.6			
	$402\frac{5}{2}$	$510\frac{1}{2}$	$3^-, 2^-$	-129	32.8	18.1			
	$404\frac{7}{2}$	$615\frac{11}{2}$	$9^+, 2^+$						
$^{186}_{75}\text{Re}$	$402\frac{5}{2}$	$512\frac{3}{2}$	$4^-, 1^-$	130	33.3	12.0			
	$402\frac{5}{2}$	$510\frac{1}{2}$	$3^-, 2^-$	-139	38.2	21.8			
	$402\frac{5}{2}$	$503\frac{7}{2}$	$6^-, 1^-$	-208	26.6	8.71			
	$514\frac{9}{2}$	$512\frac{3}{2}$	$6^-, 3^-$						

Unabhängig von der Reichweite ist $V_0\alpha$ negativ. Eine anziehende Spin-Spin-Wechselwirkung liefert also das richtige Vorzeichen für die Energiedifferenzen. Allerdings variieren die Werte für $V_0\alpha$ von Kern zu Kern und von Außenteilchenniveau zu Außenteilchenniveau. Dies ist jedoch unserer Meinung nach nicht verwunderlich, da V_{PN} als Restwechselwirkung natürlich vom betrachteten Kern und darin wieder von den Einteilchenniveaus abhängt, in denen die Außenteilchen sitzen. ($V_0\alpha$ hat eine Größenordnung, die durchaus mit früheren Rechnungen, z.B. [18] übereinstimmt.) Der von Jones et al. gemachte Versuch, den Ansatz für V_{PN} dadurch zu bestimmen, daß ein mit festen Parametern vorgegebener Ansatz die Δ_{exp} -Werte der Banden aller betrachteten Kerne gleichzeitig mit möglichst geringen Abweichungen reproduzieren soll, scheint uns deshalb nicht sinnvoll zu sein. Aus dem gleichen Grund kann hier nicht entschieden werden, ob eine endliche Reichweite eine Verbesserung gegenüber der δ -Funktion bringt. Außerdem sollte unserer Meinung nach bei der Ermittlung der Δ_{exp} -Werte, falls irgend möglich, nur die Formel (A,IV,18) benutzt werden, da sonst diese Werte mit Unsicherheiten bis zu 20% behaftet sind.

Die Tabelle 2 zeigt neben den experimentellen Werten des odd-even-shift O_{exp} die mit den aus Tabelle 1 entnommenen Parameterwerten $V_0\alpha$ berechneten theoretischen Werte O_{theo} . (Wir unterscheiden wieder die mit $r_\beta = 1.67 \text{ fm} \equiv (r_{\beta_1})$ und $r_\beta = 0.001 \text{ fm} \equiv (\delta)$ sowie die mit (A,IV,17) $\equiv (1)$ und (A,IV,18) $\equiv (2)$ ermittelten Werte.) Wir stellen fest :

Für die $K_D=0$ -Banden der Kerne ^{166}Ho , ^{168}Tm und ^{170}Tm hat der berechnete odd-even-shift das richtige Vorzeichen, für die Kerne ^{158}Tb , ^{170}Lu , ^{174}Lu , ^{176}Lu und ^{182}Ta jedoch das falsche Vorzeichen. Da sich die Außenteilchen bei den für die Berechnung von Δ_{theo} und O_{theo} maßgeblichen Wellenfunktionen in denselben Nilsson-niveaus befinden, müßte sich mit dem zur Anpassung von Δ_{theo} benützten Parameterwert $V_0\alpha$ wenigstens das richtige Vorzeichen von O_{theo} ergeben. Es sollte sogar eine gleichzeitige Anpassung von Δ_{theo} und O_{theo} an die experimentellen Werte durch passende Wahl von V_0 und r_β möglich sein.

Beim Kern ^{166}Ho lassen sich, wie aus Tabelle 3 hervor-

Tabelle 2: Vergleich der experimentellen Werte des odd-even-shift O_{exp} mit den theoretischen O_{theo} , wobei die nach (1) oder (2) für $r_{\beta}=1.67 \text{ fm} \equiv (r_{\beta 1})$ und $r_{\beta}=0.001 \text{ fm} \equiv (\delta)$ ermittelten Werte für $V_0\alpha$ aus Tabelle 1 zur Ermittlung von O_{theo} benützt wurden

Kern	Nilsson Niveaus		K^{π}	O_{exp} in keV	O_{theo} in keV			
	Proton	Neutron			(1) ($r_{\beta 1}$)	(1) (δ)	(2) ($r_{\beta 1}$)	(2) (δ)
$^{158}_{65}\text{Tb}$	$411\frac{3}{2}$	$521\frac{3}{2}$	O^{-}	7.5	-96.0	-156		
	$411\frac{3}{2}$	$402\frac{3}{2}$	O^{+}	-32.3	+4.15	15.4		
$^{166}_{67}\text{Ho}$	$523\frac{7}{2}$	$633\frac{7}{2}$	O^{-}	-32.2	-23.8	-101.	-33.6	-127.
$^{168}_{69}\text{Tm}$	$411\frac{1}{2}$	$521\frac{1}{2}$	O^{-}	-26.5	-172.	-246.	-171.	-245.
$^{170}_{69}\text{Tm}$	$411\frac{1}{2}$	$521\frac{1}{2}$	O^{-}	-38.5	-170.	-244.	-168.	-241.
$^{170}_{71}\text{Lu}$	$404\frac{7}{2}$	$633\frac{7}{2}$	O^{+}	-42.				
$^{174}_{71}\text{Lu}$	$404\frac{7}{2}$	$633\frac{7}{2}$	O^{+}	-36.5	4.2	20.3		
	$402\frac{5}{2}$	$512\frac{5}{2}$	O^{-}	27.	-59.6	-137.		
$^{176}_{71}\text{Lu}$	$404\frac{7}{2}$	$514\frac{7}{2}$	O^{-}	68.3	-49.7	-288.	-50.6	293.
$^{182}_{73}\text{Ta}$	$404\frac{7}{2}$	$503\frac{7}{2}$	O^{-}	21.	-1.26	-8.03		

Tabelle 3: Ermittlung der Parameterwerte $V_0\alpha$ und r_{β} , für die beim Kern ^{166}Ho Δ_{exp} und O_{exp} gleichzeitig stimmen, wobei Δ_{exp} nach (A,IV,17) $\equiv$ (1) und (A,IV,18) $\equiv$ (2) ermittelt wurde.

	K_S, K_D	Δ_{exp} in keV	O_{exp} in keV	r_{β} in fm	$-V_O^\alpha$ in MeV	Δ_{theo} in keV	O_{theo} in keV
(1)	7 , 0	-85.7	-32.2	1.45	23.9	-85.6	-32.2
	4 , 3	167.7				67.2	
(2)	7 , 0	-107.4	-32.2	1.61	22.5	-107.4	-32.2
	4 , 3	164.5				84.4	

geht, durch Festlegung von r_p auf 1.45 fm bzw. 1.61 fm, der odd-even-shift und der $7^- - 0^-$ -Abstand Δ_{exp} mit ein und demselben Parameterwert $V_0\alpha$ anpassen, wobei wieder die nach (A, IV, 17) und (A, IV, 18) ermittelten Werte für Δ_{exp} zugrunde gelegt wurden. Zum Vergleich zeigt Tabelle 3 dann auch noch den mit obigen $V_0\alpha$ erhaltenen $4^+ - 3^+$ -Abstand, der mit dem entsprechenden experimentellen Δ_{exp} verglichen wird. Es zeigt sich, daß die Benützung von (A, IV, 18) zur Ermittlung von Δ_{exp} erheblich andere Ergebnisse als (A, IV, 17) liefert.

Bei den Kernen ^{168}Tm und ^{170}Tm liefert eine anziehende Restwechselwirkung das richtige Vorzeichen für Δ_{theo} und O_{theo} , allerdings kann r_p nicht so gewählt werden, daß beide Werte mit ein und denselben Parameterwert $V_0\alpha$ gleichzeitig richtig wiedergegeben werden, jedoch verringert eine endliche Reichweite die Diskrepanzen gegenüber der δ -funktionsförmigen Wechselwirkung. Man sieht also, daß bei den Kernen ^{166}Ho , ^{168}Tm und ^{170}Tm der Vergleich mit dem Experiment zusammen mit unserer Theorie entscheidet, daß eine endliche Reichweite der δ -funktionsförmigen Wechselwirkung überlegen ist.

Für die restlichen Kerne hat der theoretisch berechnete odd-even-shift nicht nur eine falsche absolute Größe, sondern sogar ein falsches Vorzeichen. Das kann unserer Meinung nach zweierlei Gründe haben.

Zum einen ist vermutlich der Ansatz (A, IV, 16) für die Restwechselwirkung noch zu primitiv. Deshalb haben wir auch noch Matricelemente für eine Gauß-Wechselwirkung mit Ortsaustausch- und Ortsaustausch-Spin-Spin-Term (Formeln aus C, VIII) untersucht. Mit den dann vorhandenen 3 Stärkeparametern können natürlich immer Δ_{exp} und O_{exp} gleichzeitig angepaßt werden, wobei die Parameter jedoch nicht eindeutig bestimmt sind. (Nur der Ortsaustausch-Spin-Spin-Term muß auf Grund der Eigenschaften der Matricelemente zwingend abstoßend sein.)

Den gleichen Erfolg könnte man auch mit einem soft-core-Potential erreichen, da die für den odd-even-shift verantwortlichen Matricelemente eine wesentliche stärkere Abhängigkeit von der Reichweite als die für den $K_S - K_D$ -Abstand

verantwortlichen Matrixelemente haben. Auch die Mitnahme einer Tensorkraft kann, wie Jones et al. [18] gezeigt haben, Verbesserungen bringen.

Zum anderen müssen jedoch auch noch die verwendeten Wellenfunktionen auf ihre Brauchbarkeit hin untersucht werden. Beim Kern ^{158}Tb wird z.B., wie schon in A,III ausgeführt wurde, das zugrundeliegende Protonenniveau durch das Nilssonmodell völlig falsch wiedergegeben. Wir vermuten deshalb, daß das bei diesem Kern auftretende falsche Vorzeichen des odd-even-shifts auch durch die falsche Wellenfunktion verursacht wird. Der gleiche Grund kann möglicherweise auch bei den restlichen Kernen außer bei ^{176}Lu zu dem falschen Vorzeichen des berechneten odd-even-shifts führen. Diese Vermutung wird umgekehrt durch die Tatsache bestärkt, daß beim Kern ^{166}Ho wo, wie schon in A,III durch Betrachtung der Kerne ^{165}Dy und ^{165}Ho festgestellt wurde, das Nilssonmodell das experimentelle Spektrum recht gut wiedergibt, bereits durch den einfachen Ansatz (A,IV,16) der K_D - K_S -Abstand und der odd-even-shift quantitativ richtig geliefert werden.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Restwechselwirkung unbedingt einen anziehenden Spin-Spin-Term enthalten muß, um die experimentell gemessenen K_D - K_S -Abstände erklären zu können, und daß die Verwendung eines Gaußpotentials gegenüber der δ -Funktion in den Fällen eine Verbesserung bringt, wo die Einteilchenniveaus durch das Nilssonmodell gut beschrieben werden. In den Fällen, wo das Vorzeichen des berechneten odd-even-shifts mit dem des Experiments nicht übereinstimmt, sollten vor Verwendung komplizierterer Ansätze für V_{PN} zunächst bessere Wellenfunktionen für die Aubeilchen benützt werden.

Nach dieser eingehenden Diskussion von V_{PN} sollen nun mit den durch (A,IV,6) bzw. (A,IV,12a) und (A,IV,12b) gegebenen Wellenfunktionen und durch (A,IV,14a) bzw. (A,IV,14b) gegebenen Energien von H_I die effektiven Trägheitsmomente von Rotationsbanden von u-u-Kernen ermittelt werden.

3. Das effektive Trägheitsmoment von Rotationsbanden deformierter u-u-Kerne

a) Allgemeine theoretische Überlegungen

Zur Berechnung des effektiven Trägheitsmoments benutzen wir die in A,II hergeleiteten Formeln. Wir hatten dort erhalten :

Für $\bar{K} \neq 0, 1$:

$$(A, IV, 19) \quad \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{K}) = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \left(\frac{|\langle \psi_{v, \bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{v, \bar{K}-1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} + \frac{|\langle \psi_{v, \bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{v, \bar{K}+1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} \right) \right)^{-1}$$

Für $\bar{K}=0$:

$$(A, IV, 20) \quad \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, 0) = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \frac{|\langle \psi_{v, 1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, 0}^3 \rangle|^2}{E_{v, 1} - E_{\bar{v}, 0}} \right)^{-1}$$

Für $\bar{K}=1$:

$$(A, IV, 21) \quad \Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, 1) = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_v \left(\frac{|\langle \psi_{v, 0}^3 | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, 1} \rangle|^2}{E_{v, 0} - E_{\bar{v}, 1}} + \frac{|\langle \psi_{v, 2} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, 1} \rangle|^2}{E_{v, 2} - E_{\bar{v}, 1}} \right) \right)^{-1}$$

Wie in C,VII gezeigt wird, koppeln in den Fällen, in denen weder das Proton noch das Neutron in $\frac{1}{2}$ -Niveaus sitzen, bei denen sich also $\bar{K}_S$ und $\bar{K}_D$ um mehr als 1 unterscheiden, zusammengehörige $\bar{K}_S$ - und $\bar{K}_D$ -Niveaus nicht über die Schrauboperatoren j_{+1} und j_{-1} miteinander. Dann enthält der Energienenner, der in obigen Formeln auftritt, stets nichtverschwindende Nilssonenergiedifferenzen (von H_{IO} herrührend), gegenüber denen wir die durch V_{PN} bewirkten kleineren Beiträge zum Energienenner in guter Näherung vernachlässigen können. Die in C,VII explizit durchgeführte Untersuchung der auftretenden Matrixelemente ergibt dann das folgende Ergebnis :

Für $\bar{K}_S - \bar{K}_D > 1$ haben die zusammengehörigen $\bar{K}_S$ - und $\bar{K}_D$ -Banden sowie die beiden Teilbanden einer $\bar{K}_D=0$ -Bande jeweils das gleiche effektive Trägheitsmoment $\Theta_{\text{eff}, \text{uu}}(\bar{v}, \bar{K})$. Dieses hängt

mit den effektiven Trägheitsmomenten $\Theta_{\text{eff},ug}(\bar{v}_p, \bar{l}_p)$ und $\Theta_{\text{eff},gu}(\bar{v}_N, \bar{l}_N)$ der entsprechenden Banden des u-g- und g-u-Kerns wie folgt zusammen :

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{eff},uu}(\bar{v}, \bar{k}_S) &= \Theta_{\text{eff},uu}(\bar{v}, \bar{k}_D) = \\ (A, IV, 22) \quad &= \left(\Theta_{\text{eff},ug}(\bar{v}_p, \bar{l}_p)^{-1} + \Theta_{\text{eff},gu}(\bar{v}_N, \bar{l}_N)^{-1} - \Theta_0^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Falls sich das Proton oder das Neutron oder beide in $\frac{1}{2}$ -Niveaus befinden, also $\bar{k}_S - \bar{k}_D = 1$ gilt, dann koppeln die zusammengehörigen $\bar{k}_S$ - und $\bar{k}_D$ -Niveaus miteinander. In diesen Fällen enthält der Energienenner, durch den das betreffende Matrixelement dividiert werden muß, nur die von H_{I1} herkommende Energiedifferenz, da $\Psi_{\bar{v}, \bar{k}_S}$ und $\Psi_{\bar{v}, \bar{k}_D}$ bezüglich H_{I0} entartet sind. Hier ist also die Mitnahme von H_{I1} von entscheidender Bedeutung, da sonst unsere Störungsrechnung zusammenbrechen würde. Obwohl auch für $\bar{k}_S - \bar{k}_D = 1$ für zusammengehörige $\bar{k}_S$ - und $\bar{k}_D$ -Banden die gleichen Matrixelemente auftreten (siehe C, VII), ist hier der Wert für Θ_{eff} für die beiden zusammengehörigen Banden verschieden. Der Energienenner des Matrixelements, das die Kopplung von $\Psi_{\bar{v}, \bar{k}_S}$ mit $\Psi_{\bar{v}, \bar{k}_D}$ beschreibt, hat nämlich für die $\bar{k}_S$ -Bande und für die $\bar{k}_D$ -Bande verschiedene Vorzeichen.

Wenn es sich bei der $\bar{k}_D$ -Bande um eine $\bar{k}_D = 0$ -Bande handelt, dann haben deren Teilbanden und auch die Teilbanden der zugehörigen $\bar{k}_S = 1$ -Bande merklich verschiedene Trägheitsmomente, da hier im Gegensatz zu sonstigen $\bar{k} = 0$ -Banden wegen der fehlenden Nilssonenergiedifferenzen die durch H_{I1} bewirkte J-Abhängigkeit von $E_{v,0}$ stärker zum Tragen kommt. Ob diese Feinheiten im experimentellen Spektrum allerdings zu sehen sind, hängt davon ab, inwieweit bei den entsprechenden Banden Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung ausreicht, oder ob nicht höhere Ordnungen mitberücksichtigt werden müssen.

Zusammenfassend läßt sich also sagen :

Für zusammengehörige $\bar{k}_S$ - und $\bar{k}_D$ -Banden mit $\bar{k}_S - \bar{k}_D > 1$ erwarten wir im wesentlichen das gleiche effektive Trägheitsmoment. Die beiden Teilbanden der $\bar{k}_D = 0$ -Bande haben hier das gleiche effektive Trägheitsmoment. Für zusammengehörige $\bar{k}_S$ - und $\bar{k}_D$ -

Banden mit $\bar{K}_S - \bar{K}_D = 1$ erhalten wir verschiedene Trägheitsmomente. Ist $\bar{K}_D$ gleich null, so haben außerdem die nach geraden und ungeraden J-Werten klassifizierten Teilbanden der $\bar{K}_D = 0$ - und der dazugehörigen $\bar{K}_S = 1$ -Bande allesamt unterschiedliche Trägheitsmomente. Im folgenden soll untersucht werden, inwieweit diese theoretischen Vorhersagen vom experimentellen Material bestätigt werden und wie gut die berechneten Werte für Θ_{eff} mit den aus dem Experiment extrahierten Werten übereinstimmen.

b) Vergleich mit dem Experiment

Bei der Anwendung unserer Modellrechnungen haben wir, wie schon in A,III darauf zu achten, daß die Einteilchenniveaus, in denen die Außenteilchen sitzen, relativ gut mit dem Nilssonmodell wiedergegeben werden, da sonst schon die Basis für unsere Störungsrechnung schlecht ist. Außerdem müssen von den betrachteten Rotationsbanden genügend viele Niveaus gemessen worden sein, damit das experimentelle Trägheitsmoment ausreichend genau bestimmt werden kann. Aus diesen beiden Gründen kann der Vergleich mit dem experimentellen Material vorerst leider nur in einigen Fällen durchgeführt werden.

Die in die Rechnung eingehenden Größen Θ_0 und β wurden wieder, wie schon in A,III gleich den Werten des dem betrachteten u-u-Kerns zugrundeliegenden g-g-Kerns gesetzt, so daß auch die effektiven Trägheitsmomente von u-u-Kernen ohne freie Parameter berechnet werden. Tabelle 4 zeigt die Ergebnisse unserer Rechnungen im Vergleich mit dem Experiment.

Betrachten wir zunächst die experimentellen Werte. In den Fällen, in denen sich $\bar{K}_S$ und $\bar{K}_D$ um mehr als 1 unterscheiden, haben die zusammengehörigen $\bar{K}_S$ - und $\bar{K}_D$ -Banden im wesentlichen das gleiche effektive Trägheitsmoment. Im Fall $\bar{K}_S - \bar{K}_D = 1$ unterscheiden sich die Trägheitsmomente der beiden zusammengehörigen Banden jedoch beträchtlich. Beides ist in vollständiger Übereinstimmung mit den von uns gemachten theoretischen Vorhersagen.

Wenn wir uns die berechneten Trägheitsmomente der einzelnen Banden ansehen, dann können wir bei den 6^+ - und 1^+ -Banden von

Tabelle 4: Das effektive Trägheitsmoment von Rotationsbanden von u-u-Kernen im Vergleich mit dem Experiment

Kern	Θ_o in $\hbar^2/\text{keV}$	β	Nilsson Niveaus Proton Neutron		K	Θ_{eff} in $\hbar^2/\text{keV}$ (EXP) (THEO)	
$^{164}_{67}\text{Ho}$	0.0408	0.306	$523\frac{7}{2}$	$523\frac{5}{2}$	6	0.055	0.053
					1	0.054	0.053
$^{166}_{67}\text{Ho}$	0.0409	0.313	$523\frac{7}{2}$	$633\frac{7}{2}$	7	0.056	0.065
					0	0.056	0.065
			$523\frac{7}{2}$	$521\frac{1}{2}$	4	0.050	0.048
					3	0.057	0.055
$^{176}_{71}\text{Lu}$	0.0392	0.291	$404\frac{7}{2}$	$514\frac{7}{2}$	7	0.043	0.042
					0	0.044	0.042
$^{170}_{69}\text{Tm}$	0.0376	0.305	$411\frac{1}{2}$	$521\frac{1}{2}$	0	0.043	0.037
					0	0.044	0.038
					1	0.048	0.048
					1	0.044	0.046

^{164}Ho sowie bei den 7^- - und 0^- -Banden von ^{176}Lu eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit dem Experiment feststellen. Auch die Übereinstimmung von Theorie und Experiment bei den 4^+ - und 3^+ -Banden von ^{166}Ho kann als sehr gut bezeichnet werden, was den absoluten Wert der berechneten Trägheitsmomente anbelangt. Der von der Theorie vorhergesagte Unterschied in den Trägheitsmomenten der beiden zusammengehörigen Banden wird vom Experiment quantitativ bestätigt.

Dagegen sind die berechneten Werte für Θ_{eff} für die 7^- - und die 0^- -Bande von ^{166}Ho zu groß, obwohl, wie in A,III gezeigt wurde, die effektiven Trägheitsmomente der entsprechenden Banden des zugrundeliegenden u-g- und g-u-Kerns sehr genau den experimentellen Werten entsprechen. Eine Mitnahme von V_{PN} im Energienenner allein konnte, wie eine zusätzlich durchgeführte Rechnung ergab, keine Verbesserungen bringen, so daß wir vermuten, daß durch V_{PN} in diesem Fall auch die Wellenfunktionen erheblich gestört werden. Dies hätte zur Folge, daß Proton und Neutron nicht ausschließlich in den gleichen Niveaus wie im u-g- bzw. g-u-Kern sitzen, sondern sich mit gewisser Wahrscheinlichkeit auch in anderen Niveaus befinden, wo sie keinen so großen Beitrag zum effektiven Trägheitsmoment liefern. Eine genaue Berechnung dieses Effekts konnte jedoch wegen der Kompliziertheit der numerischen Rechnungen noch nicht durchgeführt werden.

Beim Kern ^{170}Tm sollte der in A,IV,3a geschilderte Effekt auftreten, daß die Teilbanden in der $\bar{K}_D=0$ - und in der zugehörigen $\bar{K}_S=1$ -Bande verschiedene Trägheitsmomente haben. Dieser Effekt tritt im experimentellen Spektrum tatsächlich auf. Durch unsere Modellrechnungen erhalten wir die richtigen Vorzeichen für diese Unterschiede. Die absoluten Werte der berechneten Trägheitsmomente stimmen mit den experimentellen Werten nicht ganz überein. Dies erscheint uns jedoch nicht verwunderlich, da bei beiden Kernen mit ziemlicher Sicherheit Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung wegen der vergleichsweise kleinen Energiedifferenzen im Nenner nicht ausreicht (im Zähler stehen, wie die explizite Rechnung zeigt, relativ große Matrixelemente), und wir höhere Ordnungen mitberück-

sichtigen müßten. Außerdem spielt auch hier die Frage eine Rolle, wie gut das Nilssonmodell für diesen Kern paßt. (Siehe zu ^{170}Tm auch die von Ogle et al. [29] allerdings unter Verwendung von gefitteten Rotationsparametern durchgeführten Rechnungen.)

Abschließend läßt sich feststellen, daß sich mit unserem einfachen Kernmodell, bestehend aus einem starren, symmetrischen deformierten g-g-Rumpf, dessen Trägheitsmoment und Deformation wir gleich den Werten des entsprechenden freien g-g-Kerns setzen, und zwei Außenteilchen, die über V_{PN} wechselwirken, auch die effektiven Trägheitsmomente von u-u-Kernen parameterfrei und in überraschend guter Übereinstimmung mit dem Experiment berechnen lassen. Die gemachten qualitativen Vorhersagen über Unterschied in den Trägheitsmomenten zusammengehöriger $\bar{K}_S$ - und $\bar{K}_D$ -Banden werden bei den betrachteten Kernen ausnahmslos bestätigt und auch die quantitativen Rechnungen ergaben sehr befriedigende Ergebnisse. Die bei der Berechnung der effektiven Trägheitsmomente von u-g- und g-u-Kernen gemachten Einschränkungen über die Verwendbarkeit des Nilssonmodells gelten auch hier, und die dort diskutierten Verbesserungsmöglichkeiten müßten auch hier in späteren Arbeiten untersucht werden.

Teil B

Modellrechnungen zu den elektromagnetischen Übergangs-
wahrscheinlichkeiten innerhalb von Rotationsbanden
deformierter q-q-, u-g- und q-u-Kerne

I. Berechnung des allgemeinen Ausdrucks für elektro-
magnetische Übergangswahrscheinlichkeiten von quan-
tenmechanischen Gebilden

Der Gesamthamiltonoperator H für das System Materie plus Strahlungsfeld kann stets wie folgt zerlegt werden :

$$(B,I,1) \quad H = H_{STR} + H_{MAT} + H_{WW}.$$

Dabei hat H_{STR} , der Operator des Strahlungsfelds die Form :

$$(B,I,2) \quad H_{STR} = \sum_i \hbar \omega_{\underline{k}_i} a_{\underline{k}_i, s_i}^+ a_{\underline{k}_i, s_i}.$$

Die Summation läuft über alle im Normierungsvolumen L^3 möglichen Tupel $\underline{k}_i, s_i$, wobei $\underline{k}_i$ der Wellenvektor eines Photons mit der Energie $\hbar \omega_{\underline{k}_i}$ ist, und s_i angibt, daß dieses Photon in Richtung des Einheitsvektors $\underline{e}_{\underline{k}_i, s_i}$ polarisiert ist. $a_{\underline{k}_i, s_i}^+$ bzw. $a_{\underline{k}_i, s_i}$ sind Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für ein Photon.

Die Eigenfunktionen $\chi = \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots}$ von H_{STR} haben die Gestalt :

$$(B,I,3) \quad \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots} = \prod_i \chi_{\underline{k}_i, s_i}^{\mu_i}.$$

Dabei ist μ_i die Zahl der Photonen mit $\underline{k}_i$ und $\underline{e}_{\underline{k}_i, s_i}$. Die Größe $\chi_{\underline{k}_i, s_i}^{\mu_i}$ kann als unendlicher Spaltenvektor, dessen Elemente in der $(\mu_i + 1)$. Zeile eine 1 und sonst nur Nullen sind, dargestellt werden. Für die durch (B,I,3) gegebene Produktfunktion gilt dann :

$$(B,I,4) \quad H_{STR} \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots} = E_{STR} \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots}$$

mit

$$(B, I, 5) \quad E_{STR} = \sum_i \hbar \omega_{k_i} \mu_i.$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a_{k_i, s_i}^+ bzw. a_{k_i, s_i} , die in der gewählten Darstellung die gleiche Gestalt wie die zeitunabhängigen Matrizen $p+iq$ und $p-iq$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators haben, haben auf die Eigenfunktion χ von H_{STR} folgende Wirkung:

$$(B, I, 6a) \quad a_{k_i, s_i}^+ \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots} = \sqrt{\mu_i + 1} \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i + 1, \dots}$$

$$(B, I, 6b) \quad a_{k_i, s_i} \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots} = \sqrt{\mu_i} \chi^{\mu_1, \dots, \mu_i - 1, \dots}.$$

H_{MAT} ist der Hamiltonoperator der Materie. Er hängt natürlich vom betrachteten quantenmechanischen Gebilde ab und wirkt nur auf dessen Koordinaten. Wegen

$$(B, I, 7) \quad H_{MAT} \varphi = E_{MAT} \varphi$$

ist φ Eigenfunktion von H_{MAT} zur Energie E_{MAT} .

H_{WW} gibt die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie an. Er enthält Terme, die linear in den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des Strahlungsfeldes sind, und solche, die darin quadratisch sind. Den ersten Anteil bezeichnen wir mit H_{WW}^1 , den zweiten mit H_{WW}^2 . In den uns interessierenden Fällen läßt sich H_{WW}^1 , wie in B, II gezeigt wird, auf die allgemeine Form bringen:

$$(B, I, 8) \quad H_{WW}^1 = - \int \frac{1}{2} \{ \underline{j}(\underline{r}) \underline{Q}(\underline{r}) + \underline{Q}(\underline{r}) \underline{j}'(\underline{r}) \} d\underline{r}.$$

Dabei sind $\underline{j}(\underline{r})$ und $\underline{j}'(\underline{r})$ vom speziellen Problem abhängige Vektoroperatoren, die nur die Eigenschaften der Materie, nicht jedoch Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des Strahlungsfeldes enthalten. Im Falle eines geladenen Teilchens mit Spin ist $\underline{j}(\underline{r})$ beispielsweise der Operator der elektrischen Stromdichte, die zum einen durch Ladungs-

verschiebung, zum anderen durch Bewegung der magnetischen Momente des Teilchens bewirkt wird.

$\underline{A}(\underline{r})$ ist der Operator des Vektorpotentials des Strahlungsfeldes und hat folgende Gestalt :

$$(B, I, 9) \quad \underline{A}(\underline{r}) = \sum_{\underline{k}, i, s_i} \underline{e}_{\underline{k}, i, s_i} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \omega_{\underline{k}}}} (a_{\underline{k}, i, s_i} e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} + a_{\underline{k}, i, s_i}^+ e^{-i \underline{k} \cdot \underline{r}}).$$

Für den Operator des ungestörten Problems, definiert durch

$$(B, I, 10) \quad H_0 = H_{STR} + H_{MAT}$$

lassen sich die Eigenfunktionen Ψ leicht angeben. Es gilt :

$$(B, I, 11) \quad \Psi = \Psi \chi \quad \text{mit} \quad H_0 \Psi = (E_{MAT} + E_{STR}) \Psi.$$

Mit den Eigenfunktionen von H_0 wird H_{WW} in Diracscher Störungsrechnung behandelt. Dabei ist H_{WW}^1 ein Störterm erster Ordnung und H_{WW}^2 ein Störterm zweiter Ordnung. Störungsrechnung erster Ordnung liefert für Emission (Übergang ins Kontinuum) und Absorption (Übergang vom Kontinuum in einen scharfen Zustand) die "golden rule". Man erhält damit für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit $w_{a,b}$, dafür daß der Zustand Ψ^a mit Energie E^a in den Zustand Ψ^b mit Energie E^b übergeht

$$(B, I, 12) \quad w_{a,b} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi^b | H_{WW}^1 | \Psi^a \rangle|^2 S_K(E^a),$$

wobei nur Übergänge zwischen Zuständen gleicher Energie, also mit $E^b = E^a$, möglich sind. Die Größe $S_K(E^a)$ ist die Zustandsdichte des Kontinuums an der Stelle E^a .

Da in H_{WW}^1 nur der von den speziellen Materialeigenschaften unabhängige Term $\underline{A}$ Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\underline{k}, i, s_i}^+$, $a_{\underline{k}, i, s_i}$ enthält, die auf die Wellenfunktionen des Strahlungsfeldes wirken, läßt sich sofort über die Anteile des Strahlungsfeldes integrieren. Dabei existieren für ein beliebiges, festes j nur Matrixelemente zwischen

solchen Eigenfunktionen χ^b und χ^a , die sich um genau ein Lichtquant unterscheiden, für die also gilt :

$$(B, I, 13) \quad \mu_i^b = \mu_i^a \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad \mu_j^b = \mu_j^a \pm 1 \quad \text{für } i = j$$

Wir erhalten dann :

$$(B, I, 14) \quad \begin{aligned} \langle \chi^b | \underline{Q}(\tau) | \chi^a \rangle &= \langle \chi^{\mu_1^b, \dots, \mu_j^b, \dots} | \underline{Q}(\tau) | \chi^{\mu_1^a, \dots, \mu_j^a, \dots} \rangle = \\ &= \prod_{i \neq j} \delta_{\mu_i^b, \mu_i^a} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \epsilon_0 L^3 \omega_{k_j}}} \cdot e_{k_j, s_j} \{ \delta_{\mu_j^b, \mu_j^a - 1} \sqrt{\mu_j^a} e^{i k_j \tau} + \delta_{\mu_j^b, \mu_j^a + 1} \sqrt{(\mu_j^a + 1)} e^{-i k_j \tau} \}. \end{aligned}$$

Speziell für Absorption, $\mu_i^b = \mu_i^a$ für $i \neq j$, $\mu_j^b = \mu_j^a + 1$ ergibt sich :

$$(B, I, 15a) \quad \langle \chi^b | \underline{Q}(\tau) | \chi^a \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2 \epsilon_0 L^3 \omega_{k_j}}} \sqrt{\mu_j^a} e^{i k_j \tau} \cdot e_{k_j, s_j}$$

und für Emission, $\mu_i^b = \mu_i^a$ für $i \neq j$, $\mu_j^b = \mu_j^a - 1$ erhalten wir :

$$(B, I, 15b) \quad \langle \chi^b | \underline{Q}(\tau) | \chi^a \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2 \epsilon_0 L^3 \omega_{k_j}}} \sqrt{\mu_j^a + 1} e^{-i k_j \tau} \cdot e_{k_j, s_j}.$$

Damit haben die Matrixelemente von H_{ww}^1 bei Absorption eines Lichtquants mit $\underline{k}_j$, e_{k_j, s_j} die Gestalt :

$$(B, I, 16a) \quad \begin{aligned} \langle \Psi^b | H_{ww}^1 | \Psi^a \rangle &= \\ &= -\sqrt{\frac{\hbar \mu_j}{2 \epsilon_0 L^3 \omega_{k_j}}} \langle \Psi^b | \int \frac{1}{2} \{ \underline{j}(\tau) e_{k_j, s_j} e^{i k_j \tau} + e^{i k_j \tau} e_{k_j, s_j} \underline{j}(\tau) \} d\tau | \Psi^a \rangle. \end{aligned}$$

Und bei Emission eines Lichtquants mit $\underline{k}_j$, e_{k_j, s_j} gilt :

$$(B, I, 16b) \quad \begin{aligned} \langle \Psi^b | H_{ww}^1 | \Psi^a \rangle &= \\ &= -\sqrt{\frac{\hbar (\mu_j + 1)}{2 \epsilon_0 L^3 \omega_{k_j}}} \langle \Psi^b | \int \frac{1}{2} \{ \underline{j}(\tau) e_{k_j, s_j} e^{-i k_j \tau} + e^{-i k_j \tau} e_{k_j, s_j} \underline{j}(\tau) \} d\tau | \Psi^a \rangle. \end{aligned}$$

Die Zustandsdichte des Kontinuums pro Raumwinkel $d\Omega$ ist bei den als scharf angenommenen Materiezuständen Ψ^b und Ψ^a die Zustandsdichte des Strahlungsfeldes allein. Für diese

Größe ergibt sich, wenn wir $\omega_{k_j} = \omega$ setzen :

$$(B, I, 17) \quad g_k(E^a) = g_{STR}(\hbar\omega) = \frac{2L^3\omega^2}{8\pi^3\hbar c^3 \epsilon_0}.$$

Unter Verwendung der Abkürzungen $\underline{k}_j = \underline{k}$, $\underline{e}_{k_j, s_j} = \underline{e}_p$ und mit

$$(B, I, 18) \quad \hat{H}_{ww}^{1\pm} = - \int \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{e}_p e^{\pm i \underline{k} \underline{r}} + e^{\pm i \underline{k} \underline{r}} \underline{e}_p \cdot \underline{j}'(\underline{r}) d\tau$$

erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit $w_{a,b}$ pro Zeit und Raumwinkel für Absorption

$$(B, I, 19a) \quad w_{a,b}^{(Abs.)} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} \mu_j |\langle \varphi^b | \hat{H}_{ww}^{1+} | \varphi^a \rangle|^2$$

und Emission

$$(B, I, 19b) \quad w_{a,b}^{(Emi.)} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} (\mu_j + 1) |\langle \varphi^b | \hat{H}_{ww}^{1-} | \varphi^a \rangle|^2.$$

Dabei ergibt sich das für Absorption oder Emission eines Lichtquants mit Wellenvektor $\underline{k}$ und Polarisation $\underline{e}_p$ verantwortliche $\hat{H}_{ww}^{1\pm}$ dadurch, daß in H_{ww}^1 die Größe $\underline{Q}(\underline{r})$ durch $\underline{e}_p e^{\pm i \underline{k} \underline{r}}$ ersetzt wird. Bei bekannten $\underline{j}(\underline{r})$ und $\underline{j}'(\underline{r})$ läßt sich dann für das gegebene Problem die Übergangswahrscheinlichkeit berechnen.

II. Berechnung des Wechselwirkungsterms H_{WW}^1 zwischen Strahlung und Materie sowie der Eigenfunktionen und Energien von H_{MAT} für g-g-, u-g- und g-u-Kerne

1. g-g-Kerne

a) Ermittlung von $H_{WW,gg}$

Als Modell für einen g-g-Kern benutzen wir ein starres homogen geladenes Sphäroid mit Massendichte $\bar{\sigma}$ und Ladungsdichte $\bar{\rho}$. Für dieses Gebilde erhalten wir folgende klassische Lagrangefunktion L , wenn wir die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld mitberücksichtigen :

$$(B, II, 1) \quad L = \int \left\{ \frac{1}{2} \bar{\sigma} \cdot \dot{\underline{r}}^2 + \bar{\rho} \dot{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) - \bar{\rho} \varphi(\underline{r}) \right\} d\tau.$$

Dabei ist $\underline{r}$ die Koordinate vom Massenmittelpunkt (= Ladungsschwerpunkt) des Sphäroids zum betrachteten Volumenelement $d\tau$. Da das Gebilde starr ist und als Ganzes mit der momentanen Drehgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ rotiert, gilt :

$$(B, II, 2) \quad \dot{\underline{r}} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

und wir erhalten :

$$(B, II, 3) \quad L = \int \left\{ \frac{1}{2} \bar{\sigma} (\underline{\omega} \times \underline{r})^2 + \bar{\rho} (\underline{\omega} \times \underline{r}) \cdot \underline{A}(\underline{r}) - \bar{\rho} \varphi(\underline{r}) \right\} d\tau.$$

Setzen wir $\varphi = 0$, und rechnen wir das Spatprodukt um, so ergibt sich :

$$(B, II, 4) \quad L = \frac{1}{2} \int \left\{ \bar{\sigma} (\underline{\omega} \times \underline{r})^2 \right\} d\tau + \underline{\omega} \cdot \int \bar{\rho} \underline{r} \times \underline{A}(\underline{r}) d\tau.$$

Durch Einführung des Trägheitstensors $\underline{\Theta}$ und der Größe $\underline{\mu}$

$$(B, II, 5) \quad \underline{\mu} = \int \bar{\rho} \underline{r} \times \underline{A}(\underline{r}) d\tau$$

erhalten wir :

$$(B, II, 6) \quad L = \frac{1}{2} \underline{\omega}^+ \underline{\Theta} \underline{\omega} + \underline{\omega}^+ \underline{\mu}.$$

Dabei ist die Multiplikation eine Matrizenmultiplikation, $\underline{\omega}$ ein Spaltenvektor, $\underline{\omega}^+$ ein Zeilenvektor, $\underline{\Theta}$ ein Tensor.

Legen wir nun in die drei Hauptträgheitsachsen des Sphäroids ein körperfestes ξ - η - ζ -System, dessen Lage bezüglich des raumfesten X-Y-Z-Systems durch die drei Eulerschen Winkel α, β, γ festgelegt ist, so hängt die Lage des Sphäroids von α, β, γ ab. Damit sind auch die Größen $\underline{\Theta}$ und $\underline{\mu}$ bei gegebenem raumfesten $\underline{\alpha}$ Funktionen der Eulerschen Winkel. Da sich auch $\underline{\omega}$ durch die Eulerschen Winkel und deren Zeitableitungen ausdrücken läßt, ist die Lagrangefunktion somit eine Funktion der Eulerschen Winkel und deren Zeitableitungen:

$$(B, II, 7) \quad L = L(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \alpha, \beta, \gamma).$$

Wir führen zunächst die Abkürzungen

$$(B, II, 8) \quad \underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

ein, die natürlich keine Vektoren im eigentlichen Sinn darstellen. Dann erhalten wir für den Zusammenhang zwischen $\underline{\omega}$ und $\dot{\underline{\alpha}}$ folgende Gleichungen:

$$(B, II, 9) \quad \underline{\omega} = \underline{T} \dot{\underline{\alpha}}, \quad \dot{\underline{\alpha}} = \underline{T}^{-1} \underline{\omega}.$$

Dabei ist $\underline{T}$ eine von den Eulerschen Winkeln abhängige Matrix, deren explizite Gestalt davon abhängt, ob wir auf raumfeste oder körperfeste Achsen zerlegen. Für die Lagrangefunktion erhalten wir dann:

$$(B, II, 10) \quad L = L(\dot{\underline{\alpha}}, \underline{\alpha}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{\alpha}}^+ \underline{T}^+ \underline{\Theta} \underline{T} \dot{\underline{\alpha}} + \dot{\underline{\alpha}}^+ \underline{T}^+ \underline{\mu}.$$

Als nächstes sollen nun die zu α, β, γ kanonisch konjugierten Impulse $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$, kurz mit p_α bezeichnet, berechnet werden. Unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\underline{\Theta}$ gilt:

$$(B, II, 11) \quad p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \underline{I}^+ \underline{\Theta} \underline{I} \dot{\alpha} + (\underline{I}^+ \underline{\mu})_{\alpha} .$$

Analoges gilt für p_{β} und p_{γ} . Damit folgt :

$$(B, II, 12) \quad \underline{p}_{\alpha} = \underline{I}^+ \underline{\Theta} \underline{I} \dot{\alpha} + \underline{I}^+ \underline{\mu} .$$

Daraus ergibt sich für $\dot{\alpha}$:

$$(B, II, 13) \quad \dot{\alpha} = (\underline{I}^+ \underline{\Theta} \underline{I})^{-1} (\underline{p}_{\alpha} - \underline{I}^+ \underline{\mu}) = (\underline{I}^{-1} \underline{\Theta}^{-1} \underline{I}^{T^{-1}}) (\underline{p}_{\alpha} - \underline{I}^+ \underline{\mu}) .$$

Nun bilden wir mit der üblichen Vorschrift die Hamiltonfunktion H .

$$(B, II, 14) \quad (H) = \dot{\alpha}^+ p_{\alpha} - L .$$

Umrechnung auf die richtigen Variablen $\underline{p}_{\alpha}, \alpha$ liefert :

$$(B, II, 15) \quad H = \frac{1}{2} (\underline{p}_{\alpha}^+ - \underline{\mu}^+ \underline{I}) (\underline{I}^{-1} \underline{\Theta}^{-1} \underline{I}^{T^{-1}}) (\underline{p}_{\alpha} - \underline{I}^+ \underline{\mu}) .$$

Definieren wir nun die Größe

$$(B, II, 16) \quad \underline{p}_{\omega} = \underline{\Theta} \omega + \underline{\mu} = \underline{I}^{T^{-1}} \underline{p}_{\alpha} ,$$

dann gilt :

$$(B, II, 17) \quad \underline{p}_{\alpha}^+ = \underline{p}_{\omega}^+ \underline{I} ,$$

und wir erhalten endlich für die Hamiltonfunktion H :

$$(B, II, 18) \quad H = \frac{1}{2} (\underline{p}_{\omega}^+ - \underline{\mu}^+) \underline{\Theta}^{-1} (\underline{p}_{\omega} - \underline{\mu}) .$$

Wegen $\dot{\alpha} = \underline{I}^{-1} \omega$ und $\underline{p}_{\omega} = \underline{I}^{T^{-1}} \underline{p}_{\alpha}$ gilt nun nach [30], daß die Größe $\underline{p}_{\omega}$ mit dem Drehimpulsvektor $\underline{L}_R$ des Sphäroids, der mit Hilfe von infinitesimalen Drehungen bestimmt werden kann, identisch ist.

$$(B, II, 19) \quad \underline{p}_{\omega} = \underline{L}_R .$$

Damit ergibt sich :

$$(B, II, 20) \quad H = \frac{1}{2} (\underline{L}_R^+ - \underline{\mu}^+) \underline{\Theta}^{-1} (\underline{L}_R - \underline{\mu}) .$$

Das Kreuz am vorderen Ausdruck werden wir im folgenden weglassen, da keine Gefahr von Mißverständnissen besteht.

Wenn wir nun die in (B, II, 20) auftretenden Größen auf das körperfeste $\{-\gamma-\beta\}$ -System beziehen - wir deuten dies durch einen oberen Index K an -, so werden $\underline{\Theta}$ und $\underline{\Theta}^{-1}$ feste, von den Eulerschen Winkeln unabhängige Größen. Diese Tatsache ermöglicht es uns, die klassische Hamiltonfunktion

$$(B, II, 21) \quad H = \frac{1}{2} (\underline{L}_R^K - \underline{\mu}^K) \underline{\Theta}^{K,-1} (\underline{L}_R - \underline{\mu}^K)$$

sofort in den hermiteschen Hamiltonoperator zu übersetzen. Der klassische Drehimpulsvektor geht in den quantenmechanischen Drehimpulsoperator über, dessen körperfeste Komponenten die bekannten anomalen Vertauschungsrelationen befolgen. Beim Ausmultiplizieren ist zu beachten, daß $\underline{L}_R$ auch auf $\underline{\mu}^K$ wirkt. Wir erhalten :

$$(B, II, 22) \quad H = \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{L}_R^K - \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{\mu}^K - \frac{1}{2} \underline{\mu}^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{L}_R^K + \frac{1}{2} \underline{\mu}^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{\mu}^K .$$

Damit ergibt sich

$$(B, II, 23) \quad H = H_{gg} + H_{ww, gg} ,$$

wobei gilt :

$$(B, II, 24) \quad H_{gg} = \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{L}_R^K$$

$$(B, II, 25) \quad H_{ww, gg} = -\frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{\mu}^K - \frac{1}{2} \underline{\mu}^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{L}_R^K + \frac{1}{2} \underline{\mu}^K \underline{\Theta}^{K,-1} \underline{\mu}^K .$$

Für den uns interessierenden in 01 linearen Störterm $H_{ww, gg}^1$ gilt :

$$(B, II, 26) \quad H_{WW, gg}^1 = -\frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K-1} \underline{\mu}^K - \frac{1}{2} \underline{\mu}^K \underline{\Theta}^{K-1} \underline{L}_R^K.$$

Wir sehen, daß im Gegensatz zum Störterm für ein geladenes Teilchen, der wegen der Coulombbeziehung von $-(\underline{p}e\underline{a}_+ + e\underline{a}_p)$ auf die einfachere Form $-2e\underline{a}_p$ gebracht werden kann, hier der nicht weiter zu vereinfachende Ausdruck (B,II,26) auftritt. Wie sich später ergibt, liefert genau dieser Ausdruck die richtigen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Um unsere allgemeinen Überlegungen über die Übergangswahrscheinlichkeiten quantenmechanischer Gebilde aus B,I anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, daß $H_{WW, gg}^1$ auf die allgemeine Form

$$(B, II, 27) \quad H_{WW, gg}^1 = - \int \frac{1}{2} \{ \dot{j}_{g3}(\tau) \underline{Q}(\tau) + \underline{Q}(\tau) \dot{j}_{g3}(\tau) \} d\tau$$

gebracht werden kann.

Die Größe $\underline{\mu}$ = Vektor mit auf das raumfeste System bezogenen Komponenten kann durch die nur von den Eulerschen Winkeln abhängige Matrix $\underline{S}^K$ (in C,IX explizit angegeben) in die Größe $\underline{\mu}^K$ = derselbe Vektor mit körperfesten Komponenten transformiert werden.

$$(B, II, 28) \quad \underline{\mu}^K = \underline{S}^K \underline{\mu}$$

Mit (B,II,5) $\equiv$

$$(B, II, 29) \quad \underline{\mu} = \int \underline{s} \cdot \underline{r} \times \underline{Q}(\tau) d\tau,$$

wobei $\underline{s} = \underline{s}(\underline{r}, \alpha, \beta, \gamma)$ die Ladungsdichte ist, die innerhalb des Sphäroids konstant und außerhalb gleich Null ist, demnach also auch von der durch α, β, γ gegebenen Lage des Sphäroids im Raum abhängt, läßt sich dann schreiben :

$$(B, II, 30) \quad \underline{\mu}^K = \underline{S}^K \int \underline{s} \cdot \underline{r} \times \underline{Q}(\tau) d\tau$$

und man erhält :

$$(B, II, 31) \quad H_{WW,gg}^1 = -\frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K-1} \underline{S}^K \int \underline{r} \times \underline{Q}(\underline{r}) d\tau - \frac{1}{2} \left(\underline{S}^K \int \underline{r} \times \underline{Q}(\underline{r}) d\tau \right) \underline{\Theta}^{K-1} \underline{L}_R^K.$$

Da $\underline{\Theta}^{K-1}$ diagonal ist und $\underline{S}^K, \underline{\Theta}^{K-1}, \underline{L}_R^K$ nicht von $\underline{r}$ abhängen, können diese Größen ins Integral gezogen werden. Es ergibt sich, wie in C,X explizit gezeigt wird :

$$(B, II, 32) \quad H_{WW,gg}^1 = -\int \frac{1}{2} \{ \underline{S}((\underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K-1} \underline{S}^K) \times \underline{r}) \underline{Q}(\underline{r}) + \underline{Q}(\underline{r}) \cdot \underline{S}((\underline{S}^{K+} \underline{\Theta}^{K-1} \underline{L}_R^K) \times \underline{r}) \} d\tau.$$

Damit ist $H_{WW,gg}^1$ bereits auf die in (B,II,27) geforderte Form gebracht, wenn wir durch

$$(B, II, 33) \quad \underline{j}_{gg}(\underline{r}) = \underline{S}(\underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K-1} \underline{S}^K) \times \underline{r}, \quad \underline{j}'_{gg}(\underline{r}) = \underline{S}(\underline{S}^{K+} \underline{\Theta}^{K-1} \underline{L}_R^K) \times \underline{r}$$

die Stromausdrücke $\underline{j}_{gg}(\underline{r})$ und $\underline{j}'_{gg}(\underline{r})$ definieren. Wenn man sich diese beiden Ausdrücke etwas genauer ansieht, so erkennt man in beiden den klassischen Stromausdruck

$$(B, II, 33a) \quad \underline{j}_{gg}(\underline{r}) = \underline{S} \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{S} \dot{\underline{r}}$$

wieder, welcher hier auf Grund der Operatoreigenschaften in zwei verschiedene Anteile aufspaltet, die jeweils mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in unsere Formeln eingehen.

Nach B,I erhält man nun für Störoperatoren H_{WW}^1 , die sich auf die Form (B,II,27) bringen lassen, den für die die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten benötigten Term $H_{WW,gg}^{1\pm}$ einfach dadurch, daß man in $H_{WW,gg}^1$ die Größe $\underline{Q}(\underline{r})$ durch $e^{\pm i \underline{k} \cdot \underline{r}} \underline{e}_p$ ersetzt. Da $\underline{Q}(\underline{r})$ nur in $\underline{\mu}$ auftritt, ist diese Ersetzung nur in $\underline{\mu}$ vorzunehmen. Man erhält dann :

$$(B, II, 34) \quad \underline{\mu}^{\pm} = \int \underline{r} \times \underline{e}_p e^{\pm i \underline{k} \cdot \underline{r}} d\tau$$

$$(B, II, 35) \quad H_{WW,gg}^{1\pm} = -\frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K-1} \underline{\mu}^{K\pm} - \frac{1}{2} \underline{\mu}^{K\pm} \underline{\Theta}^{K-1} \underline{L}_R^K.$$

b) Energien und Eigenfunktionen von H_{gg}

Da wir zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten für Übergänge innerhalb der Rotationsbande eines g-g-Kerns die Eigenfunktionen von H_{gg} benötigen, wollen wir diese gleich an dieser Stelle angeben. Aus der Formel (B,II,24)≡

$$(B,II,36) \quad H_{gg} = \frac{1}{2} L_R^K \hat{Q}^{K-1} L_R^K$$

erhält man im Fall des symmetrischen Kriesels mit $\hat{Q}_\xi = \hat{Q}_\eta = \hat{Q}_0$, $\hat{Q}_3 = \hat{Q}_3$ sofort :

$$(B,II,37) \quad H_{gg} = \frac{1}{2\hat{Q}_0} L_R^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hat{Q}_3} - \frac{1}{\hat{Q}_0} \right) L_3^2 .$$

Als zugehörige Eigenfunktion ergibt sich :

$$(B,II,38) \quad \varphi_{gg} = \varphi_{gs}^{L,M,K} \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi^2}} D_{M,K}^L(\alpha, \beta, \gamma) ,$$

wobei $D_{M,K}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ die übliche Kreiseigenfunktion ist, mit Quantenzahlen L zu L_R^2 , K zu L_3 und M zu L_Z .

Wenn wir uns nur für Zustände interessieren, bei denen keine Rotation um die Symmetriachse = $\hat{J}$ -Achse vorhanden ist, und wenn wir außerdem fordern, daß das Gebilde nur mit geraden Drehimpulswerten rotieren soll - dies ist sinnvoll, wenn wir die Grundzustandsrotationsbande eines g-g-Kerns beschreiben wollen -, dann folgt $K = 0$, und L ist gerade. Damit erhalten wir als Wellenfunktion des g-g-Kerns

$$(B,II,39) \quad \varphi_{gg} = \varphi_{gs}^{L,M,0} = \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi^2}} D_{M,0}^L(\alpha, \beta, \gamma) ,$$

die zur Energie

$$(B,II,40) \quad E_{gg} = \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\hat{Q}_0}$$

gehört.

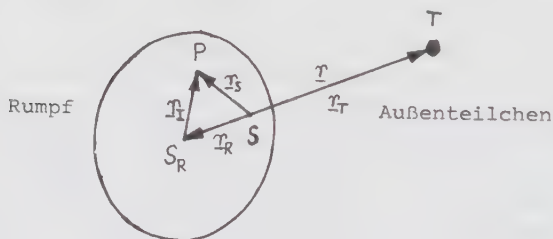
Damit sind für g-g-Kerne die zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten wichtigen Größen φ_{gg} und E_{gg} bestimmt.

2. u-g- und g-u-Kerne

a) Ermittlung von $H_{WW,ug}^1$

Als Modell für einen g-u- oder u-g-Kern betrachten wir ein System, das aus einem starren deformierten g-g-Rumpf (Sphäroid, wie in B,II,1) und einem unpaarigen Außenteilchen, Proton oder Neutron besteht. Das Außenteilchen trägt die Ladung $\mathcal{E}e$ (wobei $\mathcal{E}=0$ für Neutron, $\mathcal{E}=1$ für Proton). Der Rumpf hat dann die Ladung $(Z-\mathcal{E})e$, wenn Z die Kernladungszahl des betrachteten Kerns ist. Wie Abb. 3 zeigt, bewegen sich der Rumpf mit der Rumpfmasse $(A-1)m$ und das Außenteilchen mit der Masse m um den Gesamtschwerpunkt S .

Abb. 3 : Schematisches Modell eines u-g- oder g-u-Kerns



Der Gesamtschwerpunkt S wird als ruhend angenommen. Der Rumpf rotiert um den Rumpfschwerpunkt S_R . Bezeichnen wir, wie aus Abb. 3 ersichtlich, den Vektor $\underline{SS}_R$ mit $\underline{r}_R$, den Vektor $\underline{ST}$ mit $\underline{r}_T$ und die zu einem beliebigen im Rumpf festen Punkt P des Rumpfes gehenden Vektoren $\underline{SP}$ und $\underline{S_R P}$ mit $\underline{r}_S$ bzw. $\underline{r}_I$, sowie den Vektor $\underline{S_R T}$ mit $\underline{r}$, dann gelten folgende Beziehungen:

$$(B,II,41) \quad \underline{r}_R = -\frac{1}{A} \underline{r}, \quad \underline{r}_T = \frac{A-1}{A} \underline{r}, \quad \underline{r}_S = \underline{r}_R + \underline{r}_I.$$

Für die Lagrangefunktion des gesamten Gebildes im elektromagnetischen Feld erhalten wir zunächst, wenn wir den Spin des Außenteilchens nicht berücksichtigen :

$$\begin{aligned} L = \\ (B, II, 42) \quad &= \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}_T^2 + \int \left\{ \frac{1}{2} \underline{\mathcal{G}}_S \dot{\underline{r}}_S^2 + \mathcal{S}_S \dot{\underline{r}}_S \underline{Q}(\underline{r}_S) \right\} d\tau_S + \varepsilon e \dot{\underline{r}}_T \underline{Q}(\underline{r}_T) - \bar{V}(\underline{r}_T - \underline{r}_R, \alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

Dabei sind $\underline{\mathcal{G}}_S = \underline{\mathcal{G}}_S(\underline{r}_S, \alpha, \beta, \gamma)$ die Massendichte; $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_S(\underline{r}_S, \alpha, \beta, \gamma)$ die Ladungsdichte des Sphäroids. (Die Abhängigkeit von $\underline{r}_S$ entsteht durch die Form und Bewegung des Sphäroids.) Beide sind innerhalb des Sphäroids konstant und außerhalb gleich Null. Zu den in B,II,1 benützten Dichtefunktionen $\underline{\mathcal{G}}$ und $\mathcal{S}$ (ohne Index S) besteht folgender Zusammenhang:

$$(B, II, 43a) \quad \underline{\mathcal{G}}_S(\underline{r}_S, \alpha, \beta, \gamma) = \underline{\mathcal{G}}_S(\underline{r}_S) = \underline{\mathcal{G}}(\underline{r}_T) = \underline{\mathcal{G}}(\underline{r}_S - \underline{r}_R, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$(B, II, 43b) \quad \mathcal{S}_S(\underline{r}_S, \alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{S}_S(\underline{r}_S) = \mathcal{S}(\underline{r}_T) = \mathcal{S}(\underline{r}_S - \underline{r}_R, \alpha, \beta, \gamma).$$

Damit erhält man nach Einführung der neuen Integrationsvariablen $\underline{r}_T$ (siehe Abb.2) für das in (B,II,42) auftretende Integral I

$$\begin{aligned} I = \int \left\{ \frac{1}{2} \underline{\mathcal{G}}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \dot{\underline{r}}_R^2 + \mathcal{S}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \dot{\underline{r}}_R \cdot \underline{Q}(\underline{r}_R + \underline{r}_T) \right\} d\tau_T + \\ (B, II, 44) \quad + \int \left\{ \frac{1}{2} \underline{\mathcal{G}}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \dot{\underline{r}}_T^2 + \mathcal{S}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \dot{\underline{r}}_T \cdot \underline{Q}(\underline{r}_R + \underline{r}_T) \right\} d\tau_T. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von

$$(B, II, 45a) \quad \int \frac{1}{2} \underline{\mathcal{G}}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \dot{\underline{r}}_R^2 d\tau_T = (A-1) \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}_R^2 = \frac{A-1}{A^2} \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2$$

$$(B, II, 45b) \quad \int \mathcal{S}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \dot{\underline{r}}_R \cdot \underline{Q}(\underline{r}_R + \underline{r}_T) d\tau_T := -\frac{1}{A} \underline{q}(-\frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \dot{\underline{r}} = -\frac{1}{A} \underline{q} \dot{\underline{r}}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} I = \frac{A-1}{A^2} \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - \frac{1}{A} \underline{q} \cdot \dot{\underline{r}} + \\ (B, II, 46) \quad + \int \left\{ \frac{1}{2} \underline{\mathcal{G}}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \dot{\underline{r}}_T^2 + \mathcal{S}(\underline{r}_T, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \dot{\underline{r}}_T \cdot \underline{Q}(\underline{r}_R + \underline{r}_T) \right\} d\tau_T. \end{aligned}$$

Wenn wir wieder voraussetzen, daß der Rumpf starr rotiert, dann gilt :

$$(B, II, 47) \quad \dot{\underline{r}}_I = \underline{\omega} \times \underline{r}_I .$$

Damit ergibt sich für das Integral I

$$(B, II, 48) \quad I = \frac{A-1}{A^2} \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - \frac{1}{A} \underline{q} \cdot \dot{\underline{r}} + \int \frac{1}{2} \mathcal{G}(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) (\underline{\omega} \times \underline{r}_I)^2 d\tau_I + \\ + \underline{\omega} \cdot \int \mathcal{S}(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \underline{r}_I \times \underline{Q}(-\frac{1}{A} \underline{r} + \underline{r}_I) d\tau_I .$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$(B, II, 49) \quad \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{Q} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \int \mathcal{G}(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) (\underline{\omega} \times \underline{r}_I)^2 d\tau_I$$

$$(B, II, 50) \quad \underline{\mu}_{u_3} = \int \mathcal{S}(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \underline{r}_I \times \underline{Q}(-\frac{1}{A} \underline{r} + \underline{r}_I) d\tau_I$$

gilt dann :

$$(B, II, 51) \quad I = \frac{A-1}{A^2} \frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 - \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{Q} \underline{\omega} - \frac{1}{A} \underline{q} \cdot \dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \cdot \underline{\mu}_{u_3} .$$

Mit (B, II, 5) gehen wir in die Formel für die gesamte Lagrangefunktion ein und erhalten mit der durch $m_R = m (A-1)/A$ definierten reduzierten Masse m_R nach einer kleinen Umrechnung

$$(B, II, 52) \quad L = \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{Q} \underline{\omega} + \frac{m_R}{2} \dot{\underline{r}}^2 - \tilde{V}(\underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) + \mathcal{E} e \frac{A-1}{A} \underline{Q}(\frac{A-1}{A} \underline{r}) \dot{\underline{r}} - \frac{1}{A} \underline{q} \cdot \dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \cdot \underline{\mu}_{u_3} .$$

Die ersten Glieder stellen die Lagrangefunktion ohne Feld dar. Die folgenden Glieder geben im wesentlichen die Kopplung des Strahlungsfelds mit der Bewegung des Außenteilchens, mit der Umlaufbewegung des Rumpfes bei festgehaltener Orientierung und schließlich mit der Eigenrotation des Rumpfes wieder.

Führen wir auch hier, wie im Fall des g-g-Kerns, ein im Rumpfschwerpunkt befestigtes ξ - η - ζ -System mit Achsen parallel zu den Hauptträgheitsachsen des Rumpfes ein,

dessen Orientierung bezüglich des raumfesten X-Y-Z-Systems durch die Eulerschen Winkel festgelegt wird, dann kann $\underline{\omega}$ wieder durch $\underline{\alpha}$ und $\underline{\dot{\alpha}}$ ausgedrückt werden. Die Lagrange-funktion L enthält dann die Variablen $\underline{\alpha}, \underline{\dot{\alpha}}, \underline{r}, \underline{\dot{r}}$.

Nach dem gleichen Verfahren wie in B, II, 1 wird nun aus dieser Lagrange-funktion die zugehörige Hamiltonfunktion und der entsprechende Hamiltonoperator gewonnen. Man erhält :

$$(B, II, 53) \quad H = \frac{1}{2m_R} \left\{ p - \left(\epsilon e^{\frac{A-1}{A}} Q_L \left(\frac{A-1}{A} \tau \right) - \frac{1}{A} q \left(-\frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\underline{L}_R^K - \underline{\mu}_{u_j}^K \right) \underline{\odot}^{K-1} \left(\underline{L}_R^K - \underline{\mu}_{u_j}^K \right) + \bar{V}(\tau, \alpha, \beta, \gamma) \right\} +$$

Nach Ausmultiplikation ergibt sich :

$$(B, II, 54) \quad H = \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\odot}^{K-1} \underline{L}_R^K - \frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta + \bar{V}(\tau, \alpha, \beta, \gamma) \\ - \frac{1}{m_R} \left\{ \epsilon e^{\frac{A-1}{A}} Q_L \left(\frac{A-1}{A} \tau \right) - \frac{1}{A} q \left(-\frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \right\} p - \frac{1}{2} \underline{\mu}_{u_j}^K \underline{\odot}^{K-1} \underline{L}_R^K - \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\odot}^{K-1} \underline{\mu}_{u_j}^K \\ + \frac{1}{2m_R} \left\{ \epsilon e^{\frac{A-1}{A}} Q_L \left(\frac{A-1}{A} \tau \right) - \frac{1}{A} q \left(-\frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} \underline{\mu}_{u_j}^K \underline{\odot}^{K-1} \underline{\mu}_{u_j}^K .$$

Damit ist zunächst der Hamiltonoperator für ein spinloses Außenteilchen gewonnen. In unserem Fall haben wir es mit Nukleonen, also mit Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ zu tun. Im feldfreien Fall hatten wir für solche Teilchen im Hamiltonoperator nach (A, III, 2) noch ein Glied C ls hinzuzufügen. Da der Drehimpuls den Impuls als Baustein enthält, taucht beim Vorhandensein des Strahlungsfelds die Frage auf, ob wir nunmehr den kinetischen oder den kanonischen Impuls in diesen Ausdruck aufnehmen sollen.

Zur Untersuchung dieser Frage setzen wir vorübergehend die Rumpfmasse als unendlich an und legen dem Außenteilchen die Diracgleichung zugrunde. Es ergibt sich mit den in der Kernphysik üblichen Vernachlässigungen für das Außenteilchen der folgende Hamiltonoperator :

$$(B, II, 55) \quad H_{T\infty} = \frac{1}{2m} \left(p - e Q_L \right)^2 + \bar{V}(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + C \underline{L}_S - e C (\underline{s} \times \underline{r}) Q_L(\tau) - \frac{e \gamma}{2m} (\underline{s} \times \underline{\nabla}) Q_L(\tau) .$$

Die ersten beiden Glieder sind in (B, II, 54) schon enthal-

ten. Das Vorhandensein des Spins führt zu den drei zusätzlichen Ausdrücken. Von diesen ist $C \underline{\ell}_S$ die bisherige Spin-Bahn-Wechselwirkung, zu welcher infolge der Anwesenheit des Felds der nächste Term hinzutritt. Das letzte Glied $-\frac{e g}{2m} (\underline{S} \times \underline{\nabla}) \underline{Q}(\underline{r})$ gibt die Wechselwirkung des Felds mit dem Teilchen-Spin wieder. Den Term $-e C \cdot (\underline{S} \times \underline{r})$ hätte man, wie sich nunmehr zeigen läßt, dadurch erhalten können, daß man das in $\underline{1}$ enthaltene $\underline{p}$ durch $\underline{p} - e \underline{Q}$ ersetzt hätte.

Im Fall des endlich schweren Rumpfes wird man, wie aus (B, II, 55) zu entnehmen ist, den Übergang so durchführen, daß man $\underline{p}$ durch $\underline{p} - (e \frac{A-1}{A} \underline{Q}(\frac{A-1}{A} \underline{r}) - \frac{1}{A} g (-\frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma))$ ersetzt. Wenn wir die so erhaltenen Zusatzglieder miteinbeziehen, dann erhalten wir als neuen Gesamthamiltonoperator :

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\underline{\omega}}^{K-1} \underline{L}_R^K - \frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta + \bar{V}(\underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) + C \underline{\ell}_S \\ & - (\frac{P}{m_R} + C \underline{S} \times \underline{r}) \{ \epsilon e \frac{A-1}{A} \underline{Q}(\frac{A-1}{A} \underline{r}) - \frac{1}{A} g (-\frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \} - \\ (B, II, 56) \quad & - \frac{e}{2m_R} g (\underline{S} \times \underline{\nabla}) \underline{Q}(\frac{A-1}{A} \underline{r}) - \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\underline{\omega}}^{K-1} \underline{\mu}_{u_g}^K - \underline{\mu}_{u_g}^K \underline{\underline{\omega}}^{K-1} \underline{L}_R^K + \\ & + \frac{1}{2m_R} \{ \epsilon e \frac{A-1}{A} \underline{Q}(\frac{A-1}{A} \underline{r}) - \frac{1}{A} g (-\frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \}^2 + \frac{1}{2} \underline{\mu}_{u_g}^K \underline{\underline{\omega}}^{K-1} \underline{\mu}_{u_g}^K . \end{aligned}$$

Wir teilen diesen auf in

$$(B, II, 57) \quad H = H_{ug} + H_{WW,ug} ,$$

worin

$$(B, II, 58) \quad H_{ug} = \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\underline{\omega}}^{K-1} \underline{L}_R^K - \frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta + \bar{V}(\underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) + C \underline{\ell}_S$$

die feldfreien Glieder enthält. Der zweite Teil $H_{WW,ug}$ enthält Glieder, die teils linear, teils quadratisch in $\underline{Q}$ sind. Für das folgende benötigen wir nur den linearen Anteil, den wir mit $H_{WW,ug}^1$ bezeichnen. Für diesen erhalten wir :

$$\begin{aligned}
 H_{ww,ug}^1 &= -\left(\frac{1}{m_R} p + C_{sxr}\right) \left\{ e \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} \underline{Q} \left(\frac{A^{-1}}{A} \underline{r} \right) - \frac{1}{A} q \left(-\frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma \right) \right\} - \\
 (B, II, 59) \quad & - \frac{eg}{2m_R} (\underline{s} \times \underline{\nabla}) \underline{Q} \left(\frac{A^{-1}}{A} \underline{r} \right) - \\
 & - \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K^{-1}} \underline{\mu}_{u_3}^K - \frac{1}{2} \underline{\mu}_{u_3}^K \underline{\Theta}^{K^{-1}} \underline{L}_R^K.
 \end{aligned}$$

Auch diesen Ausdruck können wir wieder auf die geforderte Form :

$$(B, II, 60) \quad H_{ww,ug}^1 = - \int \frac{1}{2} \left\{ \underline{j}_{u_3}(\underline{r}') \underline{Q}(\underline{r}') + \underline{Q}(\underline{r}') \underline{j}'_{u_3}(\underline{r}') \right\} d\tau'$$

bringen, wenn wir, wie in C,X,2 explizit bewiesen wird,

$$\begin{aligned}
 (B, II, 61) \quad \underline{j}_{u_3}(\underline{r}') &= 2 \left(\frac{p}{m_R} + C_{sxr} \right) \left\{ e \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} \delta(\underline{r}' - \frac{A^{-1}}{A} \underline{r}) + \frac{1}{A} s(\underline{r}' + \frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \right\} + \\
 & + \frac{1}{m} g \delta(\underline{r}' - \frac{A^{-1}}{A} \underline{r}) \cdot (\underline{s} \times \underline{\nabla}') + s(\underline{r}' + \frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \cdot (\underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K^{-1}} \underline{S}^K) \times (\underline{r}' + \frac{1}{A} \underline{r})
 \end{aligned}$$

$$(B, II, 62) \quad \underline{j}'_{u_3}(\underline{r}') = s(\underline{r}' + \frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \cdot (\underline{S}^{K^+} \underline{\Theta}^{K^{-1}} \underline{L}_R^K) \times (\underline{r}' + \frac{1}{A} \underline{r})$$

setzen.

Nach den früheren Überlegungen erhält man dann den für die Übergangswahrscheinlichkeiten verantwortlichen Operator $\hat{H}_{ww,ug}^{1\pm}$, indem man $\underline{Q}(\underline{r})$ durch $e^{\pm i \underline{k} \underline{r}} \underline{e}_p$ ersetzt, wobei aus den Größen $\underline{\mu}_{u_3}$ und q die Größen $\underline{\mu}_{u_3}^{\pm}$ und $\hat{q}^{\pm}$ werden. Es gilt :

$$\begin{aligned}
 (B, II, 63) \quad \hat{H}_{ww,ug}^{1\pm} &= -\left(\frac{p}{m_R} + C_{sxr}\right) \left\{ e \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} \underline{e}_p e^{\pm \frac{A^{-1}}{A} i \underline{k} \underline{r}} - \frac{1}{A} \hat{q}^{\pm} \left(-\frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma \right) \right\} + \\
 & + \frac{eg}{2m} (\underline{s} \times \underline{k}) \underline{e}_p e^{\pm \frac{A^{-1}}{A} i \underline{k} \underline{r}} - \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\Theta}^{K^{-1}} \underline{\mu}_{u_3}^{K^{\pm}} - \frac{1}{2} \underline{\mu}_{u_3}^{K^{\pm}} \underline{\Theta}^{K^{-1}} \underline{L}_R^K.
 \end{aligned}$$

b) Eigenfunktionen und Energien

In (B,I,19) benötigen wir die Eigenfunktionen des feldfreien Operators H_{ug} , den wir in (B,II,57) kennengelernt

haben. Wenn wir darin auf rumpffeste Koordinaten und Spins übergehen und

$$(B, II, 64) \quad \bar{V}(\underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) + C \cdot \underline{1} \underline{s} = V_N(\underline{r}^K)$$

setzen, dann hat H_{ug} die aus (A, I, 5) bekannte Form :

$$(B, II, 65) \quad H_{ug} = -\frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta^K + V_N(\underline{r}^K) + \frac{1}{2\Theta_0} (\underline{j}^{K^2} - \underline{j}_3^2) + \frac{1}{\Theta_0} (\underline{j}_{+1}^K \underline{j}_{-1} + \underline{j}_{-1}^K \underline{j}_{+1}) + \frac{1}{2\Theta_0} (\underline{j}^{K^2} - \underline{j}_3^2) + (\frac{1}{2\Theta_3} - \frac{1}{2\Theta_0}) L_3^2 = H_I + H_C + H_A + (\frac{1}{2\Theta_3} - \frac{1}{2\Theta_0}) L_3^2.$$

In der Literatur wird häufig der Term H_C ganz vernachlässigt. Man spricht in diesem Fall von adiabatischer Näherung. Für den Resthamiltonoperator $H_I + H_A$ erhält man dann die Eigenfunktionen

$$(B, II, 66) \quad \varphi_{ug}^0 = |\bar{\nu}, \bar{J}, M, \bar{K}\rangle = \sqrt{\frac{2\bar{J}+1}{16\pi^2}} \{ D_{M, \bar{K}}^{\bar{J}} \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M, -\bar{K}}^{\bar{J}} \psi_{\bar{\nu}, -\bar{K}} \},$$

welche bezüglich J und R_1 klassifiziert sind, mit den Energien :

$$(B, II, 67) \quad E_{ug}^0 = \hbar^2 \frac{\bar{J}(\bar{J}+1) - \bar{K}^2}{2\Theta_0} + E_{\bar{\nu}, \bar{K}} \quad (\bar{K} \neq \frac{1}{2}).$$

Wir begnügen uns nicht mit dieser Näherung, sondern verwenden als Eigenfunktionen von H_{ug} diejenigen, die unter Berücksichtigung von H_C in Störungsrechnung erster Ordnung ermittelt wurden und die in (A, II, 40) angegeben sind. Es war :

$$(B, II, 68) \quad \varphi_{ug}^1 = \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{J}}^1 = |\bar{\nu}, \bar{J}, M, \bar{K}\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{\bar{J}(\bar{J}+\bar{K})(\bar{J}-\bar{K}+1)} \sum_{\bar{\nu}} \left\{ \frac{\langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}-1}^1 | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}}^0 \rangle}{E_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} |\bar{\nu}, \bar{J}, M, \bar{K}-1\rangle \right\} - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\bar{J}-\bar{K})(\bar{J}+\bar{K}+1)} \sum_{\bar{\nu}} \left\{ \frac{\langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}+1}^1 | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}}^0 \rangle}{E_{\bar{\nu}, \bar{K}+1} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} |\bar{\nu}, \bar{J}, M, \bar{K}+1\rangle \right\}.$$

Die zugehörigen Energien sind

$$(B, II, 69) \quad E_{ug}^2 = E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{J}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta_{eff}(\bar{\nu}, \bar{K})} \{ \bar{J}(\bar{J}+1) \} + A(\bar{\nu}, \bar{K}),$$

wobei $\mathcal{Q}_{\text{eff}}(\vec{\nu}, \vec{K})$ und $A(\vec{\nu}, \vec{K})$ durch (A,II,21) und (A,II,22) gegeben sind.

Mit beiden Näherungen für Wellenfunktionen und Energien werden in B,V die grundlegenden Matrixelemente für Übergänge innerhalb von Rotationsbanden berechnet, wobei sich interessante Einsichten ergeben.

III. Untersuchung des Terms $\hat{H}_{WW}^{1\pm}$ bis zur Quadrupol-näherung

Um $\hat{H}_{WW}^{1\pm}$ bis zur Quadrupolnäherung angeben zu können, wird die darin vorkommende Exponentialfunktion unter Einführung der Größe

$$(B, III, 1) \quad \underline{e}_k = \frac{c}{\omega} k$$

entwickelt :

$$(B, III, 2) \quad e^{\pm i k r} = 1 \pm i \frac{\omega}{c} \underline{e}_k r - \dots$$

Die entstehenden Ausdrücke sollen wieder für g-g-, u-g- und g-u-Kerne untersucht werden.

1. g-g-Kerne

Für g-g-Kerne erhielten wir nach (B, II, 35)

$$(B, III, 3) \quad H_{WW, gg}^{1\pm} = -\frac{1}{2} \underline{L}_R \underline{\Theta}^{K-1} \underline{\hat{\mu}}^{K\pm} - \frac{1}{2} \underline{\hat{\mu}}^{K\pm} \underline{\Theta}^{K-1} \underline{L}_R,$$

wobei der auf das raumfeste Koordinatensystem bezogene Vektor $\underline{\hat{\mu}}^{\pm}$ durch (B, II, 34) $\equiv$

$$(B, III, 4) \quad \underline{\hat{\mu}}^{\pm} = \int \mathcal{S}(\underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \underline{r} \times \underline{e}_p e^{\pm i k r} d\tau$$

gegeben ist. Um die Integration zu vereinfachen, empfiehlt es sich, körperfeste Koordinaten $\underline{r}^K$ einzuführen, da dann die Ladungsdichte $\mathcal{S}^K(\underline{r}^K)$ nur von $\underline{r}^K$, nicht jedoch von α, β, γ abhängt. Bei der Umrechnung des Integranden fallen uns zudem gleich die in (B, III, 3) benötigten körperfesten Komponenten in die Hand :

$$(B, III, 5) \quad \underline{\hat{\mu}}^{K\pm} = \int \mathcal{S}^K(\underline{r}^K) \cdot \underline{r}^K \times \underline{e}_p^K \cdot e^{\pm i \underline{k}^K \underline{r}^K} d\tau^K.$$

Da das Sphäroid homogen mit der Ladungsdichte $\mathcal{S}_0$ gela-

den sein soll, reduziert sich die Integration über den ganzen Raum auf das Sphäroid (Symbol S) :

$$(B, III, 6) \quad \hat{\underline{\mu}}^{k, \pm} = s_0 \int_S \underline{r}^k \times \underline{e}_p^k e^{\pm i \underline{k} \cdot \underline{r}^k} d\tau^k.$$

Dabei ist zu beachten, daß $\underline{e}_p^k$ und $\underline{k}^k$ von den Eulerschen Winkeln abhängige Größen sind. Setzen wir die Entwicklung (B, III, 2) für die Exponentialfunktion ein, so erhalten wir

$$(B, III, 7) \quad \hat{\underline{\mu}}^{k, \pm} = s_0 \int_S \underline{r}^k \times \underline{e}_p^k d\tau^k \pm \frac{i\omega}{c} s_0 \int_S \underline{r}^k \times \underline{e}_p^k (\underline{e}_k^k \cdot \underline{r}^k) d\tau^k.$$

Im körperfesten System wird über Grenzen integriert, die in x^k, y^k, z^k symmetrisch sind. Da $\underline{e}_k^k$ antisymmetrisch ist, fällt der erste Term weg. Es verbleibt :

$$(B, III, 8) \quad \hat{\underline{\mu}}^{k, \pm} = \mp s_0 \frac{i\omega}{c} \underline{e}_p^k \times \int_S \underline{r}^k (\underline{e}_k^k \cdot \underline{r}^k) d\tau^k.$$

Führen wir nun die Größe

$$(B, III, 9) \quad \underline{\underline{Q}}^k = \int_S s_0 \begin{pmatrix} x^{k,2} & x^k y^k & x^k z^k \\ y^k x^k & y^{k,2} & y^k z^k \\ z^k x^k & z^k y^k & z^{k,2} \end{pmatrix} d\tau^k = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$(B, III, 10) \quad Q_1 = \int_S s_0 x^{k,2} d\tau^k, \quad Q_2 = \int_S s_0 y^{k,2} d\tau^k, \quad Q_3 = \int_S s_0 z^{k,2} d\tau^k$$

ein, so ergibt sich :

$$(B, III, 11) \quad \hat{\underline{\mu}}^{k, \pm} = \mp \frac{i\omega}{c} \underline{e}_p^k \times (\underline{\underline{Q}}^k \cdot \underline{e}_k^k).$$

Da uns durch Messung nur die raumfesten Komponenten von $\underline{e}_k$ und $\underline{e}_p$ zugänglich sind, müssen wir die Größe $\hat{\underline{\mu}}^{k, \pm}$ in

diesen Größen ausdrücken. In einer in C,XI ausgeführten Rechnung erhält man für das symmetrische Sphäroid mit

$$(B,III,12) \quad Q_1 = Q_2 := Q_0$$

die folgende Formel für die u-te körperfeste Komponente von :

$$(B,III,13) \quad \hat{\mu}_u^{K,\pm} = \pm \frac{i\omega}{2c} (Q_0 + Q_3) \sum_{w,m,k} t_{k,u} t_{m,w}^* D_{m,k}^1 (\underline{e}_k \times \underline{e}_p)_w \pm \\ \pm \frac{i\omega}{2c} (Q_0 - Q_3) \sum_{w,m} t_{m,w}^* D_{m,0}^1 (\underline{e}_k \times \underline{e}_p)_w \delta_{u,3} \pm \\ \pm \frac{\omega}{\sqrt{8}c} (Q_3 - Q_0) \sum_m \underline{e}_k T^2(m) \underline{e}_p \cdot \\ \cdot \{ \delta_{u,1} (-\frac{1}{\sqrt{2}}) D_{m,1}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} D_{m,-1}^2 + \delta_{u,2} (-\frac{i}{\sqrt{2}}) D_{m,1}^2 + \frac{i}{\sqrt{2}} D_{m,-1}^2 \}.$$

Dabei sind die Größen $\underline{t} = (t_{ik})$ und $\underline{T}^2(m)$ Matrizen folgender Gestalt :

$$(B,III,14) \quad \underline{T}^2(m) = \begin{pmatrix} (\delta_{m,2} + \delta_{m,-2}), i(\delta_{m,2} - \delta_{m,-2}), (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}) \\ i(\delta_{m,2} - \delta_{m,-2}), -(\delta_{m,2} + \delta_{m,-2}), i(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) \\ (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}), i(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}), \sqrt{6} \delta_{m,0} \end{pmatrix}$$

$$(B,III,15) \quad \underline{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\hat{\mu}_u^{K,\pm}$ durch die raumfest vorgegebenen Vektoren $\underline{e}_p$ und $\underline{e}_k$ bestimmt. Die ersten beiden Anteile enthalten das Kreuzprodukt $\underline{e}_k \times \underline{e}_p$ und liefern, wie wir später sehen werden, magnetische Dipolstrahlung. Der letzte Term mit dem Glied $\underline{e}_k T^2(m) \cdot \underline{e}_p$ ergibt die elektrische Quadrupolstrahlung.

Wenden wir uns nun wieder dem gesamten Störterm $H_{WW,gg}^1$ zu. Für das symmetrische Sphäroid erhalten wir :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ww,99}^{1\pm} = & -\frac{1}{2} \hat{\mu}^{K,\pm} \frac{1}{\Theta_0} \underline{L}_R^K + \frac{1}{2} \hat{\mu}_3^{K,\pm} \left(\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Theta_3} \right) \underline{L}_{R3}^K - \\ (B, III, 16) \quad & -\frac{1}{2} \underline{L}_R^K \frac{1}{\Theta_0} \hat{\mu}^{K,\pm} + \frac{1}{2} \underline{L}_{R3}^K \left(\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Theta_3} \right) \hat{\mu}_3^{K,\pm}. \end{aligned}$$

Da bei den beiden letzten Gliedern der Operator $\underline{L}_R^K$ oder Komponenten desselben vor dem Term $\hat{\mu}^{K,\pm}$ oder dessen Komponenten stehen und sowohl auf diesen als auch auf die nachfolgende Wellenfunktion wirken, erhält man durch Anwendung der Produktregel nochmals die beiden ersten Terme sowie zwei neue Terme, wo $\underline{L}_R^K$ nur noch auf $\hat{\mu}^{K,\pm}$, nicht jedoch auf die nachfolgende Wellenfunktion wirkt (angedeutet durch []).

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ww,99}^{1\pm} = & -\hat{\mu}^{K,\pm} \frac{1}{\Theta_0} \underline{L}_R^K + \hat{\mu}_3^{K,\pm} \left(\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Theta_3} \right) \underline{L}_{R3}^K - \\ (B, III, 17) \quad & -\frac{1}{2} \left[\underline{L}_R^K \frac{1}{\Theta_0} \hat{\mu}^{K,\pm} \right] + \frac{1}{2} \left[\underline{L}_{R3}^K \left(\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Theta_3} \right) \hat{\mu}_3^{K,\pm} \right]. \end{aligned}$$

Setzt man den in (B, III, 13) ermittelten Ausdruck für $\hat{\mu}^{K,\pm}$ ein und führt die Wirkung des Operators $\underline{L}_R^K$ auf $\hat{\mu}^{K,\pm}$ durch, so ergibt sich nach einer in C, XII gezeigten Rechnung :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ww,99}^{1\pm} = & \mp \frac{i\omega}{c} \frac{Q_0 + Q_3}{2\Theta_0} (\underline{e}_K \times \underline{e}_P) \cdot \underline{L}_R \pm \\ (B, III, 18) \quad & \pm \frac{i\omega}{c} \left\{ \frac{Q_3 + Q_0}{2\Theta_0} - \frac{Q_0}{\Theta_3} \right\} \sum_{w,m} t_{m,w}^* D_{m,0}^1 (\underline{e}_K \times \underline{e}_P)_w \underline{L}_{R3}^K \\ & \mp \frac{\omega}{c} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{Q_3 - Q_0}{\Theta_0} \sum_m \underline{e}_K \underline{I}^{(2)}_m \underline{e}_P \left\{ D_{m+1}^2 \underline{L}_{R+1} - D_{m-1}^2 \underline{L}_{R-1} - \frac{1}{2}\sqrt{3} D_{m,0}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Da wir im folgenden stets Wellenfunktionen betrachten, bei denen das Sphäroid nicht um seine Symmetrieachse, die J-Achse rotiert, auf die angewandt $\underline{L}_R^K$ also null liefert, bringt der zweite Term keinen Beitrag zur Übergangswahrscheinlichkeit. Er wird deshalb im folgenden weggelassen.

Im Hinblick auf die spätere Anwendung wollen wir den Störterm noch etwas umformen. Anstelle der Ausdrücke

$$(B, III, 19) \quad Q_0 = \int_S \varrho_0 X^{K,2} d\tau^K = \int_S \varrho_0 Y^{K,2} d\tau^K, \quad Q_3 = \int_S \varrho_0 Z^{K,2} d\tau^K$$

wollen wir die durch

$$(B, III, 20a) \quad Q_{2,0} = \int_S \varrho_0 (3x^{K,2} - r^{K,2}) d\tau^K = \text{inneres Quadrupolmoment}$$

$$(B, III, 20b) \quad Q_r = \int_S \varrho_0 r^{K,2} d\tau^K$$

definierten Größen verwenden. Für die im Störterm vorkommenden Ausdrücke $Q_0 + Q_3$ und $Q_3 - Q_0$ erhält man dann :

$$(B, III, 21) \quad Q_0 + Q_3 = \frac{1}{6} (Q_{2,0} + 4Q_r), \quad Q_3 - Q_0 = \frac{1}{2} Q_{2,0}.$$

Damit ergibt sich :

$$(B, III, 22) \quad \begin{aligned} H_{ww,gg}^{1\pm} &= \mp \frac{i\omega}{c} \frac{1}{12\Theta_0} (Q_{2,0} + 4Q_r) (\underline{e}_K \times \underline{e}_P) \underline{L}_R \mp \\ &\mp \frac{\omega}{c} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \sum_m \underline{e}_K \underline{I}^2(m) \underline{e}_P \{ D_{m,+1}^2 L_{R,+1} - D_{m,-1}^2 L_{R,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} D_{m,0}^2 \}. \end{aligned}$$

Durch Einführung der Größe $\underline{I}^1(m)$, deren Eigenschaften aus denen von $t_{m,w}$ sofort ersichtlich sind,

$$(B, III, 23) \quad \underline{I}^1(m) = \begin{pmatrix} \delta_{m,-1} - \delta_{m,+1} \\ i\delta_{m,-1} + i\delta_{m,+1} \\ \sqrt{2} \delta_{m,0} \end{pmatrix} \text{ mit : } \sum_m t_{m,w}^* A_w = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{I}^1(m) \underline{A},$$

können wir unter Benutzung der Umrechnungsvorschrift von raumfesten auf körperfeste Komponenten (aus C, IX)

$$(B, III, 24) \quad L_{RW} = \sum_{m,k,u} t_{m,w}^* t_{k,u} D_{m,k}^1 L_{Ru}^k$$

den Störterm auf folgende Form bringen :

$$(B, III, 25) \quad \begin{aligned} H_{ww,gg}^{1\pm} &= \mp \frac{i\omega}{c} \frac{1}{12\sqrt{2}} \frac{Q_{2,0} + 4Q_r}{\Theta_0} \sum_m \underline{I}^1(m) (\underline{e}_K \times \underline{e}_P) \sum_{k,u} t_{k,u} D_{m,k}^1 L_{Ru}^k \\ &\mp \frac{\omega}{c} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \sum_m \underline{e}_K \underline{I}^2(m) \underline{e}_P \{ D_{m,+1}^2 L_{R,+1} - D_{m,-1}^2 L_{R,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} D_{m,0}^2 \}. \end{aligned}$$

Führen wir nun die Operatoren

$$(B, III, 26) \quad O_{M1, g_3}^{\pm(m)} = \mp \frac{\omega}{c} \frac{1}{12\sqrt{2}} \frac{(Q_{20} + 4Q_2)}{\Theta_0} \sum_{k,u} t_{k,u} D_{m,k}^1 L_{Ru}^k$$

$$(B, III, 27) \quad O_{E2, g_3}^{\pm(m)} = \mp \frac{\omega}{c} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{Q_{20}}{\Theta_0} \{ D_{m+1}^2 L_{R+1} - D_{m-1}^2 L_{R-1} - \sqrt{3} D_{m,0}^2 \}$$

ein, dann hat der Störterm die folgende endgültige Gestalt

$$(B, III, 28) \quad \hat{H}_{WW, g_3}^{1\pm} = \sum_m i \underline{I}^1(m) (\underline{e}_r x \underline{e}_k) O_{M1, g_3}^{\pm(m)} + \sum_m \underline{e}_k \underline{I}^2(m) \underline{e}_p O_{E2, g_3}^{\pm(m)},$$

die für die weiteren Betrachtungen besonders geeignet ist. Die Bezeichnung der Operatoren rührt daher, daß, wie wir später sehen werden, der erste Term magnetische Dipolstrahlung, M1-Strahlung, und der zweite Term elektrische Quadrupolstrahlung, E2-Strahlung, liefern.

2. u-g- und g-u-Kerne

(B, II, 63) liefert uns für den Störterm :

$$(B, III, 29) \quad \begin{aligned} \hat{H}_{WW, u_g}^{1\pm} = & - \left(\frac{p}{m_R} + C \underline{s} x \underline{r} \right) \{ e \underline{\varepsilon} \frac{A^{-1}}{A} \underline{e}_p e^{\pm \frac{A^{-1}}{A} i \underline{k} \underline{r}} - \frac{1}{A} \hat{q}^{\pm} (-\frac{1}{A} \underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) \} \mp \\ & \mp \frac{e g i}{2m} (\underline{s} x \underline{k}) \underline{e}_p e^{\pm \frac{A^{-1}}{A} i \underline{k} \underline{r}} - \\ & - \frac{1}{2} \underline{L}_R^k \underline{\hat{\mu}}_{u_g}^{k, \pm} - \frac{1}{2} \underline{\hat{\mu}}_{u_g}^{k, \pm} \underline{\hat{L}}_R^{k, \pm} \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst die Terme $\underline{\hat{\mu}}_{u_g}^{k, \pm}$ und $\hat{q}^{\pm}$ bis zur Quadrupolnäherung. Aus (B, II, 45b) erhält man sofort :

$$(B, III, 30) \quad \hat{q}^{\pm} = \int \underline{s}(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \underline{e}_p e^{\pm i \underline{k}(\underline{r}_I - \frac{1}{A} \underline{r})} d\tau_I$$

und daraus durch Entwicklung der Exponentialfunktion und Durchführung der Integration :

$$(B, III, 31) \quad \hat{q}^{\pm} = \int \underline{s}(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{e}_p \cdot (1 \pm i \underline{k} \underline{r}_I \mp \frac{1}{A} i \underline{k} \underline{r}) d\tau_I = (\underline{z} - \underline{\varepsilon}) \cdot \underline{e}_p (1 \pm \frac{1}{A} i \underline{k} \underline{r}).$$

Für den aus (B, II, 50) gewonnenen Ausdruck

$$(B, III, 32) \quad \hat{\underline{\mu}}_{u_3}^{\pm} = \int \vartheta(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{r}_I \times \underline{e}_p \cdot e^{\pm i \underline{k}(\underline{r}_I - \hat{\underline{A}} \underline{r})} d\underline{r}_I$$

erhält man durch Entwicklung der Exponentialfunktion :

$$(B, III, 33) \quad \hat{\underline{\mu}}_{u_3}^{\pm} = \int \vartheta(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{r}_I \times \underline{e}_p d\underline{r}_I \pm \int \vartheta(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \underline{r}_I \times \underline{e}_p (i \underline{k}(\underline{r}_I - \hat{\underline{A}} \underline{r})) d\underline{r}_I$$

Wenn wir berücksichtigen, daß die Integration über ein symmetrisches Gebilde auszuführen ist, ergibt sich :

$$(B, III, 34) \quad \hat{\underline{\mu}}_{u_3}^{\pm} = \pm \int \vartheta(\underline{r}_I, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{r}_I \times \underline{e}_p (i \underline{k} \underline{r}_I) d\underline{r}_I = \hat{\underline{\mu}}^{\pm}$$

Führen wir nun die Quadrupolnäherung auch bei den anderen Anteilen des Störterms durch, so erhalten wir zunächst :

$$(B, III, 35) \quad \begin{aligned} \hat{H}_{ww, u_3}^{1\pm} = & - \left(\frac{p}{m_R} + C \underline{s} \underline{x} \underline{r} \right) \left\{ \varepsilon e^{\frac{A-1}{A}} (1 \pm \frac{A-1}{A} i \underline{k} \underline{r}) - \frac{1}{A} (z - \varepsilon) e (1 \mp \frac{1}{A} i \underline{k} \underline{r}) \right\} \underline{e}_p \mp \\ & \mp \frac{eqi}{2m} (\underline{s} \underline{x} \underline{k}) \underline{e}_p - \frac{1}{2} \hat{\underline{\mu}}^{K, \pm} \underline{\odot}^{K-1} \underline{L}_R^K - \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\odot}^{K-1} \hat{\underline{\mu}}^{K, \pm} \end{aligned}$$

Dabei sind $\underline{r}$, $\underline{p}$, $\underline{s}$ auf das raumfeste System bezogen. Aus (B, II, 57) entnehmen wir den Ausdruck für H_{ug} , wo das Außenteilchen ebenfalls durch raumfeste Koordinaten und Spins beschrieben wird

$$(B, III, 36) \quad H_{ug} = \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\odot}^{K-1} \underline{L}_R^K + \frac{1}{2m_R} \underline{p}^2 + \bar{V}(\underline{r}, \alpha, \beta, \gamma) + C \cdot \underline{L} \underline{s}$$

Da $\underline{L}_R^K$ bei dieser Koordinatenwahl nur von den Eulerschen Winkeln abhängt und somit mit $\underline{r}$ vertauscht, ergibt sich nach kurzer elementarer Rechnung :

$$(B, III, 37) \quad \frac{p}{m_R} + C \underline{s} \underline{x} \underline{r} = \frac{i}{\hbar} (H_{ug} \underline{r} - \underline{r} H_{ug})$$

(An dieser Stelle sieht man die fundamentale Bedeutung des durch die in B, II, 1 durchgeführten Überlegungen gewonnenen Terms $C \cdot \underline{s} \underline{x} \underline{r}$).

Mit (B,III,37) können wir nun die ersten beiden Terme von $\hat{H}_{WW,ug}^{1\pm}$, die wir kurz mit

$$(B,III,38) \quad \hat{H}_{WW,T}^{1\pm} = - \left(\frac{p}{m_R} + C(s \times r) \right) \left\{ \varepsilon e^{\frac{A-1}{A}} (1 \pm \frac{A-1}{A} i k r) - \frac{1}{A} e^{(z-\varepsilon)} (1 \pm \frac{1}{A} i k r) \right\} \underline{e}_p \\ + \frac{e g i}{2m} (s \times k) \cdot \underline{e}_p$$

bezeichnen, vereinfachen. Wenn wir durch die Definitionen

$$(B,III,39) \quad e^* = \left(\varepsilon \frac{A-1}{A} - (z-\varepsilon) \frac{1}{A} \right) e, \quad e^{**} = \left(\varepsilon \left(\frac{A-1}{A} \right)^2 - (z-\varepsilon) \frac{1}{A^2} \right) e$$

effektive Ladungen e^* und e^{**} einführen, dann läßt sich $\hat{H}_{WW,T}^{1\pm}$, wie in C,XIV gezeigt wird, auf die folgende Form bringen :

$$(B,III,40) \quad \hat{H}_{WW,T}^{1\pm} = - \frac{i}{\hbar} e^* \{ H_{ug} r - r H_{ug} \} \cdot \underline{e}_p \pm \\ \pm \frac{\omega}{c} \frac{e^{**}}{2\hbar} \{ H_{ug} (\underline{e}_k \cdot \underline{r}) (\underline{r} \cdot \underline{e}_p) - (\underline{e}_k \cdot \underline{r}) (\underline{r} \cdot \underline{e}_p) H_{ug} \} \\ + \frac{i\omega}{2c} \left[\left\{ \frac{e^{**} l}{m_R} + \frac{g e s}{m} \right\} + e^{**} C(r \times (s \times r)) \right] (\underline{e}_k \times \underline{e}_p) \cdot$$

Da wir zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten Matrixelemente des Störterms $\hat{H}_{WW,ug}^{1\pm}$ zwischen Anfangszustand a und Endzustand b mit den Eigenfunktionen ψ_{ug}^a bzw. ψ_{ug}^b von H_{ug} mit Energien E_{ug}^a bzw. E_{ug}^b zu bilden haben, können wir den ersten und den zweiten Term von $\hat{H}_{WW,T}^{1\pm}$ vereinfachen. Mit

$$(B,III,41) \quad H_{ug} \psi_{ug}^b = E_{ug}^b \psi_{ug}^b, \quad H_{ug} \psi_{ug}^a = E_{ug}^a \psi_{ug}^a, \quad (E_{ug}^b - E_{ug}^a) = \pm \hbar \omega$$

$$(B,III,42) \quad - \frac{i}{\hbar} e^* \langle \psi_{ug}^b | H_{ug} r \underline{e}_p - r \underline{e}_p H_{ug} | \psi_{ug}^a \rangle = \\ = \mp i e^* \omega \langle \psi_{ug}^b | r \underline{e}_p | \psi_{ug}^a \rangle$$

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\omega}{c} \frac{e^{**}}{2\hbar} \langle \varphi_{u_3}^b | H_{u_3}(\underline{e}_K \underline{r})(\underline{r} \underline{e}_P) - (\underline{e}_K \underline{r})(\underline{r} \underline{e}_P) H_{u_3} | \varphi_{u_3}^a \rangle = \\ (B, III, 43) \quad & = \frac{e^{**} \omega^2}{2c} \langle \varphi_{u_3}^b | (\underline{e}_K \underline{r})(\underline{r} \underline{e}_P) | \varphi_{u_3}^a \rangle \end{aligned}$$

erhalten wir :

$$\begin{aligned} & \hat{H}_{w, T}^{1+} = \mp i e^* \omega \underline{r} \underline{e}_P + \frac{e^{**} \omega^2}{2c} (\underline{e}_K \underline{r})(\underline{r} \underline{e}_P) \mp \\ (B, III, 44) \quad & \mp \frac{i\omega}{2c} \left[\left\{ \frac{e^{**} \ell}{m_R} + \frac{g e s}{m} \right\} + e^{**} C(\underline{r} \times (\underline{s} \times \underline{r})) \right] (\underline{e}_K \times \underline{e}_P) . \end{aligned}$$

Da wir im allgemeinen mit Wellenfunktionen rechnen, in denen rumpffeste Koordinaten und Spins benützt werden, ist es sinnvoll, den Störterm in diesen Koordinaten anzugeben, und nicht die Wellenfunktionen auf raumfesten Koordinaten und Spins umzurechnen. Mit den in C, XV bewiesenen Formeln, nämlich mit :

$$(B, III, 45) \quad i e^* \omega \underline{r} \underline{e}_P = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega \sum_m i \underline{I}^1(m) \underline{e}_P \cdot \sum_Y \hat{Q}_{1,Y} D_{m,Y}^1 ,$$

wobei

$$(B, III, 46) \quad \hat{Q}_{1,Y} = e^* \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r^k Y_Y^1(k)$$

die sphärischen Komponenten des Operators des inneren Dipolmoments sind, mit

$$(B, III, 47) \quad \frac{e^{**} \omega^2}{2c} (\underline{e}_K \underline{r})(\underline{r} \underline{e}_P) = \frac{\omega^2}{2\sqrt{24}c} \sum_m \underline{e}_K \underline{I}^2(m) \underline{e}_P \cdot \sum_Y \hat{Q}_{2,Y} D_{m,Y}^2 ,$$

wobei

$$(B, III, 48) \quad \hat{Q}_{2,Y} = e^{**} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} (r^k)^2 Y_Y^2(k)$$

die sphärischen Komponenten des Operators des inneren

Quadrupoltensors sind, und mit

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i\omega}{2c} \left[\left\{ \frac{e^{**} \underline{\ell}}{m_R} + \frac{ge_s}{m} \right\} + e^{**} C(\underline{r} \times (\underline{s} \times \underline{r})) \right] (\underline{e}_K \times \underline{e}_P) = \\
 (B, III, 49) \quad & = \frac{\omega}{c\sqrt{2}} \sum_m i I^1(m) (\underline{e}_K \times \underline{e}_P) \sum_{\nu, u} t_{\nu, u} D_{m, \nu}^1 \left[\frac{e^{**} \underline{\ell}_u^K}{2m_R} + \frac{ge_s^K}{2m} + \frac{e^{**}}{2} C(\underline{r}^K \times (\underline{s}^K \times \underline{r}^K))_u \right]
 \end{aligned}$$

ergibt sich für den Term $\hat{H}_{WW, T}^{1+}$:

$$\begin{aligned}
 & \hat{H}_{WW, T}^{1+} = \\
 (B, III, 50) \quad & = + \frac{1}{\sqrt{8}} \omega \sum_m i I^1(m) \underline{e}_P \cdot \sum_{\nu} D_{m, \nu}^1 \hat{Q}_{1, \nu} + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{24}} \frac{\omega^2}{c} \sum_m \underline{e}_K \cdot \underline{I}^2(m) \underline{e}_P \cdot \sum_{\nu} D_{m, \nu}^2 \hat{Q}_{2, \nu} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\omega}{c} \sum_m i I^1(m) (\underline{e}_K \times \underline{e}_P) \cdot \sum_{\nu, u} t_{\nu, u} D_{m, \nu}^1 \left[\frac{e^{**} \underline{\ell}_u^K}{m_R} + \frac{ge_s^K}{m} + e^{**} C(\underline{r}^K \times (\underline{s}^K \times \underline{r}^K))_u \right].
 \end{aligned}$$

Um den gesamten Störterm für u-g- bzw. g-u-Kerne zu erhalten, müssen wir, wie (B, III, 35) angibt, noch die Terme mit $\hat{\underline{\mu}}^{K+}$ dazunehmen. Da wir in unseren Wellenfunktionen für das Außenteilchen rumpffeste Koordinaten und Spins verwenden, empfiehlt es sich, den bei dieser Koordinatenwahl nur von α, β, γ abhängigen Gesamtdrehimpulsoperator $\underline{J}^K$ zu verwenden. Durch

$$(B, III, 51) \quad \underline{L}_R^K = \underline{J}^K - \underline{j}^K,$$

wobei $\underline{j}^K$ der Gesamtdrehimpuls des Außenteilchens ist, führen wir $\underline{J}^K$ in die $\hat{\underline{\mu}}^{K+}$ -enthaltenen Terme von $H_{WW, ug}^1$ ein. Mit analogen Überlegungen wie beim g-g-Kern erhalten wir für Wellenfunktionen, bei denen der Rumpf nicht um seine Symmetrieachse rotiert, für die von $\hat{\underline{\mu}}^{K+}$ abhängigen Terme:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \hat{\mu}^{K, \pm} \hat{\mu}^{K, \pm} \hat{\mu}^{K, \pm} \hat{\mu}^{K, \pm} - \frac{1}{2} \hat{\mu}^{K, \pm} \hat{\mu}^{K, \pm} \hat{\mu}^{K, \pm} \hat{\mu}^{K, \pm} = \\
 & = \mp \frac{\omega}{c} \frac{1}{12} \frac{(Q_{2,0} + 4Q_7)}{\Theta_0} \sum_m i I^1(m) (\underline{e}_p \times \underline{e}_K) \sum_{k,u} D_{k,u}^1 t_{k,u} (\hat{J}_u^K - \hat{J}_u^K) \pm \\
 & \pm \frac{\omega}{c} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \sum_m \underline{e}_K I^2(m) \underline{e}_p \cdot \\
 & \cdot \{ D_{m+1}^2 \hat{J}_{+1}^K - D_{m-1}^2 \hat{J}_{-1}^K - \hbar \sqrt{3} D_{m,0}^2 - D_{m+1}^2 \hat{J}_{+1}^K + D_{m-1}^2 \hat{J}_{-1}^K \}
 \end{aligned}$$

(B, III, 52)

und für den gesamten Störterm ergibt sich :

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{WW,ug}^{1\pm} &= \mp \frac{\omega}{\sqrt{8}} \sum_m i I^1(m) \underline{e}_p \sum_v D_{m,v}^1 \hat{Q}_{1,v} \mp \\
 & \mp \frac{\omega}{\sqrt{8}} \sum_m i I^1(m) (\underline{e}_K \times \underline{e}_p) \cdot \\
 & \{ \sum_{v,u} D_{m,v}^1 t_{v,u} [\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{(Q_{2,0} + 4Q_7)}{\Theta_0} (\hat{J}_u^K - \hat{J}_u^K) + \frac{e^{**} \underline{L}_u^K}{m} + \frac{g e \underline{S}_u^K}{m} + e^{**} C(\underline{T} \times (\underline{S} \times \underline{T}))_u] \} \\
 & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \sum_m \underline{e}_K I^2(m) \underline{e}_p \cdot [\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_v D_{m,v}^2 \hat{Q}_{2,v} + \\
 & - \frac{1}{4} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \{ D_{m+1}^2 \hat{J}_{+1}^K - D_{m-1}^2 \hat{J}_{-1}^K - \hbar \sqrt{3} D_{m,0}^2 - D_{m+1}^2 \hat{J}_{+1}^K + D_{m-1}^2 \hat{J}_{-1}^K \}] .
 \end{aligned}$$

(B, III, 53)

Damit ist auch für u-g- und g-u-Kerne der Störterm auf die allgemeine Form

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{WW,ug}^{1\pm} &= \sum_m i I^1(m) \underline{e}_p O_{E1,ug}^{\pm}(m) + \\
 & + \sum_m i I^1(m) (\underline{e}_K \times \underline{e}_p) O_{M1,ug}^{\pm}(m) + \sum_m \underline{e}_K I^2(m) \underline{e}_p O_{E2,ug}^{\pm}(m)
 \end{aligned}$$

(B, III, 54)

gebracht. Dabei sind

$$O_{E1,ug}^{\pm}(m) = \mp \frac{\omega}{\sqrt{8}} \sum_v D_{m,v}^1 \hat{Q}_{1,v}$$

(B, III, 55)

$$\begin{aligned}
 O_{E2,ug}^{\pm}(m) &= \pm \frac{\omega}{\sqrt{2}c} [\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_v D_{m,v}^2 \hat{Q}_{2,v} + \\
 & - \frac{1}{4} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \{ D_{m+1}^2 \hat{J}_{+1}^K - D_{m-1}^2 \hat{J}_{-1}^K - \hbar \sqrt{3} D_{m,0}^2 - D_{m+1}^2 \hat{J}_{+1}^K + D_{m-1}^2 \hat{J}_{-1}^K \}]
 \end{aligned}$$

(B, III, 56)

$$O_{M1,u_3}^{\pm}(m) = \sum_{v,u} D_{m,v}^1 t_{v,u} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{8}}$$

(B,III,57)

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{(Q_{20} + 4Q_2)}{\Theta_0} (j_u^k - j_u^k) + \frac{e^{**} l_u^k}{m_R} + \frac{g e s_u^k}{m} + e^{**} C(T \times (S \times T))_u \right]$$

Operatoren, die, wie in B,IV gezeigt wird, für elektrische Dipolstrahlung = E1-Strahlung, elektrische Quadrupolstrahlung = E2-Strahlung und magnetische Dipolstrahlung = M1-Strahlung verantwortlich sind.

IV. Winkelverteilungen und totale Übergangswahrscheinlichkeiten für E1-, M1- und E2-Strahlung

Wir haben in B,III gezeigt, daß sich der Störterm für g-g-, u-g- und g-u-Kerne stets in der folgenden Form

$$\begin{aligned} H_{WW}^{1\pm} &= \sum_m i I^1(m) \underline{e}_p O_{E1}^{\pm}(m) + \sum_m i I^1(m) (\underline{e}_k \times \underline{e}_p) O_{M1}^{\pm}(m) + \\ (B, IV, 1) \quad &+ \sum_m \underline{e}_k T^2(m) \underline{e}_p \cdot O_{E2}^{\pm}(m) \end{aligned}$$

schreiben läßt. Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten bilden wir Matricelemente von $H_{WW}^{1\pm}$ mit den Eigenfunktionen ψ^b und ψ^a von H_{MAT} , die auch Eigenfunktionen zur Z-Komponente des Gesamtdrehimpulsoperators $\underline{J}$ mit Quantenzahlen M_b und M_a sind. Wegen der in den Operatoren $O_{E1}^{\pm}(m)$, $O_{M1}^{\pm}(m)$ und $O_{E2}^{\pm}(m)$ enthaltenen Terme $D_{m,k}^1$ bzw. $D_{m,k}^2$ liefert für festes M_b und M_a nur jeweils ein Glied der entsprechenden Summe, nämlich das mit $m = M_b - M_a$ nichtverschwindende Matricelemente und die Summe reduziert sich auf dieses Glied. Wir haben also zur Betrachtung der Winkelverteilung nur die Terme $i T^1(m) \cdot \underline{e}_p$, $i T^1(m) \cdot (\underline{e}_p \times \underline{e}_k)$ und $\underline{e}_k \cdot T^2(m) \cdot \underline{e}_p$ für jedes m gesondert zu untersuchen.

Zur Berechnung der Winkel- und Polarisationsverteilung, also der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Photon mit vorgegebenen $\underline{e}_k$ und $\underline{e}_p$ absorbiert bzw. emittiert wird, müssen wir uns die raumfesten Komponenten der Einheitsvektoren $\underline{e}_k$ und $\underline{e}_p$ vorgeben. Die Komponenten von $\underline{e}_k$ geben wir in Abhängigkeit der Polarwinkel ϑ, φ an, die in der üblichen Weise gezählt werden. Die Lage des zu $\underline{e}_k$ senkrechten Polarisationsvektors $\underline{e}_p$ in der durch $\underline{e}_k$ und $\underline{e}_\varphi$ aufgespannten Ebene wird durch den Winkel α zwischen $\underline{e}_p$ und $\underline{e}_\varphi$ angegeben. (α wird entgegen dem Uhrzeigersinn gezählt). Man erhält dann:

$$(B, IV, 2) \quad \underline{e}_k = \sin \vartheta \cos \varphi \underline{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \underline{e}_y + \cos \vartheta \underline{e}_z$$

$$(B, IV, 3) \quad \underline{e}_p = (\cos \vartheta \cos \varphi \cos \alpha - \sin \vartheta \sin \alpha) \underline{e}_x + (\cos \vartheta \sin \varphi \cos \alpha + \cos \vartheta \sin \alpha) \underline{e}_y - \sin \vartheta \cos \alpha \underline{e}_z$$

$$(B, IV, 4) \quad \underline{e}_K \times \underline{e}_p = (-\cos\theta \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha) \underline{e}_x + (-\cos\theta \sin\varphi \sin\alpha + \cos\varphi \cos\alpha) \underline{e}_y - \sin\theta \sin\alpha \underline{e}_z.$$

Bei der Bildung von Matrixelementen des Terms $\hat{H}_{WW}^{1+}$ erhält man oftmals von mehreren der drei Anteile $O_{E1}^{\pm}(m)$, $O_{M1}^+(m)$ und $O_{E2}^+(m)$ gleichzeitig nichtverschwindende Beiträge. In die Formeln für die Übergangswahrscheinlichkeiten (B, I, 19a) und (B, I, 19b) geht das Betragsquadrat des gesamten Matrixelements

$$(B, IV, 5) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | \hat{H}_{WW}^{1+} | \varphi^a \rangle|^2$$

ein. Sind bei gegebenen Wellenfunktionen φ^b und φ^a Beiträge der oben genannten drei Anteile gleichzeitig vorhanden, so treten neben rein quadratischen Termen auch Mischterme zwischen verschiedenen Anteilen auf. Auf Grund von Auswahlregeln können wir jedoch diese Fälle erheblich einschränken.

Betrachtung des nur bei u-g- und g-u-Kernen vorhandenen Operators $O_{E1}^+(m)$ zeigt, daß dieser negative Parität besitzt. Er liefert also nur Matrixelemente zwischen Zuständen φ^b und φ^a , die verschiedene Parität besitzen. Die Terme $O_{M1}^+(m)$ und $O_{E2}^+(m)$ haben positive Parität und liefern nur Matrixelemente zwischen Zuständen gleicher Parität. Da für einen bestimmten Übergang die Wellenfunktionen φ^b und φ^a entweder gleiche oder verschiedene Parität haben, tritt entweder E1-Strahlung oder M1- bzw. E2-Strahlung auf. Zwischen Anteilen mit verschiedener Parität ist also stets eine Trennung möglich. Wir werden diese Anteile im folgenden einzeln behandeln.

1. E1-Strahlung

Zur Untersuchung der Winkelverteilung von E1-Strahlung wird nun zunächst der als Faktor im Matrixelement auftretende Term $|\underline{iT}^1(m) \cdot \underline{e}_p|^2$ berechnet und damit dann das Betragsquadrat des gesamten Matrixelements angegeben. Wir erhalten :

für $M_b - M_a = m = -1$:

$$(B, IV, 7a) \quad |\underline{I}^{-1}(-1) \underline{e}_p|^2 = \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$(B, IV, 8a) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E_1}^{\pm}(-1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = +1$:

$$(B, IV, 7b) \quad |\underline{I}^{-1}(+1) \underline{e}_p|^2 = \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$(B, IV, 8b) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E_1}^{\pm}(+1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 7c) \quad |\underline{I}^{-1}(0) \underline{e}_p|^2 = 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha$$

$$(B, IV, 8c) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E_1}^{\pm}(0) | \varphi^a \rangle|^2 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha.$$

Wir interessieren uns im folgenden nur noch für spontane Emission. Dafür ist $O_{E_1}^{-}(m)$ verantwortlich. Mit Hilfe der Formeln (B, IV, 8a), (B, IV, 8b) und (B, IV, 8c) erhalten wir dann unter Verwendung von (B, I, 19b) die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten für spontane Emission pro Zeit und Raumwinkelement :

für $M_b - M_a = m = \pm 1$:

$$(B, IV, 9a) \quad w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E_1}^{-}(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 9b) \quad w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E_1}^{-}(0) | \varphi^a \rangle|^2 2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha.$$

Wenn wir nur wissen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Photon in die Richtung $\underline{e}_k$ emittiert wird, uns dessen Polarisation jedoch gleichgültig ist, dann müssen wir über den Polarisationswinkel α integrieren. Für die so erhaltene unpolarisierte Übergangswahrscheinlichkeit $\tilde{w}_{a,b}$ gilt dann

für $M_b - M_a = m = \pm 1$:

$$(B, IV, 10a) \quad \tilde{w}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E1}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta + 1)$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 10b) \quad \tilde{w}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E1}^-(0) | \varphi^a \rangle|^2 \sin^2 \vartheta.$$

Interessieren wir uns nur dafür, ob überhaupt ein Photon emittiert wird, aber nicht dafür, in welche Richtung und mit welcher Polarisation, dann müssen wir über den gesamten Raumwinkel integrieren. Wegen

$$(B, IV, 11) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta + 1) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{3}$$

$$(B, IV, 12) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{3}$$

erhalten wir dann für die so berechnete totale Übergangswahrscheinlichkeit $\hat{w}_{a,b}^{(m)}$ den Ausdruck :

$$(B, IV, 13) \quad \hat{w}_{a,b}^{(m)} = \frac{8}{3} \frac{\omega}{4\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E1}^-(m) | \varphi^a \rangle|^2.$$

Wenn die Anfangs- und Endzustände bezüglich M entartet sind, dann müssen wir, um die experimentell meßbare Übergangswahrscheinlichkeit zu berechnen, über die Endzustände summieren und über die Anfangszustände mitteln. Die dann resultierende gemittelte Übergangswahrscheinlichkeit $\bar{w}_{\bar{a},\bar{b}}$ hat die Form :

$$(B, IV, 14) \quad \bar{w}_{\bar{a},\bar{b}} = \frac{1}{2J_a + 1} \frac{8}{3} \frac{\omega}{4\pi \epsilon_0 \hbar c^3} \sum_{M_b, M_a} |\langle \varphi^b | O_{E1}^-(M_b - M_a) | \varphi^a \rangle|^2.$$

2. M1- und E2-Strahlung

Auf Grund des im Operator O_{M1}^+ vorkommenden Terms $D_{m,k}^1$ ermöglicht dieser nur Übergänge zwischen Zuständen φ^b und

φ^a , deren Gesamtdrehimpulse sich um ± 1 oder 0 unterscheiden. Dagegen läßt der Operator $O_{E2}^{\pm}(m)$ wegen des darin enthaltenen Terms $D_{m,k}^2$ auch Übergänge zwischen Zuständen φ^b und φ^a zu, deren Drehimpulswerte sich um ± 2 , ± 1 oder 0 unterscheiden. Für $\Delta J = \pm 2$ tritt also reine E2-Strahlung, für $\Delta J = \pm 1$, 0 treten E2- und M1-Strahlung gemeinsam auf.

a) Reine E2-Strahlung, $\Delta J = \pm 2$

Zur Berechnung der Winkelverteilung müssen wir hier das Betragsquadrat des Terms $\underline{e}_k \cdot \underline{T}^2(m) \cdot \underline{e}_p$ untersuchen. Mit

$$(B, IV, 15) \quad \underline{T}^2(m) = \begin{pmatrix} (\delta m_2 + \delta m_{-2}), i(\delta m_2 - \delta m_{-2}), (\delta m_{-1} - \delta m_1) \\ i(\delta m_{-2} - \delta m_2), -(\delta m_2 + \delta m_{-2}), i(\delta m_1 + \delta m_{-1}) \\ (\delta m_{-1} - \delta m_1), i(\delta m_1 + \delta m_{-1}), \sqrt{6} \delta m_0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich dann

für $M_b - M_a = m = -2$:

$$(B, IV, 16a) \quad \underline{e}_k \underline{T}^2(-2) \underline{e}_p = \left(\frac{1}{2} \cos \alpha \sin 2\vartheta \cos 2\varphi - \sin \alpha \sin \vartheta \sin 2\varphi \right) - i \left(\frac{1}{2} \cos \alpha \sin 2\vartheta \sin 2\varphi + \sin \alpha \sin \vartheta \cos 2\varphi \right)$$

$$(B, IV, 16b) \quad |\underline{e}_k \underline{T}^2(-2) \underline{e}_p|^2 = \sin^2 \vartheta (\cos^2 \alpha \cos^2 2\vartheta + \sin^2 \alpha)$$

$$(B, IV, 17a) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(-2) | \varphi^a \rangle|^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \alpha \cos^2 2\vartheta + \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = +2$:

$$(B, IV, 17b) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(+2) | \varphi^a \rangle|^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \alpha \cos^2 2\vartheta + \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = -1$:

$$(B, IV, 17c) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(-1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 2\vartheta + \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta)$$

für $M_b - M_a = m = +1$:

$$(B, IV, 17d) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(+1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 2\vartheta + \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta)$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 17e) \quad |ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(0) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 2\vartheta \cdot$$

Für spontane Emission erhält man :

für $M_b - M_a = m = \pm 2$:

$$(B, IV, 18a) \quad w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 2) | \varphi^a \rangle|^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \alpha \cos^2 \vartheta + \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = \pm 1$:

$$(B, IV, 18b) \quad w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 2\vartheta + \sin^2 \alpha \cos^2 \vartheta)$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 18c) \quad w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(0) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 2\vartheta \cdot$$

Für die unpolarisierte Übergangswahrscheinlichkeit $\tilde{w}_{a,b}$ ergibt sich

für $M_b - M_a = m = \pm 2$:

$$(B, IV, 19a) \quad \tilde{w}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 2) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta (\cos^2 \vartheta + 1)$$

für $M_b - M_a = m = \pm 1$:

$$(B, IV, 19b) \quad \tilde{w}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{1}{2} (\cos^2 2\vartheta + \cos^2 \vartheta)$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 19c) \quad \tilde{w}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(0) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \cdot$$

Mit Hilfe der folgenden Integrale

$$(B, IV, 20) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta (\cos^2 \vartheta + 1) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{8\pi}{5}$$

$$(B, IV, 21) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos^2 2\vartheta + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{8\pi}{5}$$

$$(B, IV, 22) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{8\pi}{5}$$

erhalten wir für die totale Übergangswahrscheinlichkeit :

$$(B, IV, 23) \quad \dot{W}_{a,b}^{(m)} = \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0\hbar c^3} \frac{8}{5} |\langle \varphi^b | O_{E2}^{(-)}(m) | \varphi^a \rangle|^2$$

und für die gemittelte Übergangswahrscheinlichkeit $\bar{W}_{a,b}$ ergibt sich

$$(B, IV, 24) \quad \bar{W}_{a,b} = \frac{1}{2J_a+1} \frac{8}{5} \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0\hbar c^3} \sum_{M_a, M_b} |\langle \varphi^b | O_{E2}^{(-)}(m) | \varphi^a \rangle|^2.$$

b) E2- und M1-Strahlung gemischt, $\Delta J = \pm 1, 0$

Für $\Delta J = \pm 1, 0$ treten im allgemeinen beide Strahlungsarten gemischt auf. Allerdings kann bei $M_b - M_a = m = \pm 2$ nur E2-Strahlung ausgesandt werden. In diesen Fällen erhalten wir die gleichen Ergebnisse wie in B, IV, 2, a. Für $M_b - M_a = m = \pm 1, 0$ tritt zu der durch $\underline{e}_k \cdot \underline{T}^2(m) \cdot \underline{e}_p$ hervorgerufenen Winkelabhängigkeit noch die durch $i \underline{T}^1(m) \cdot (\underline{e}_p \times \underline{e}_k)$ bewirkte hinzu. Wir erhalten zunächst :

für $M_b - M_a = m = -1$

$$(B, IV, 25a) \quad i \underline{T}^1(-1) (\underline{e}_p \times \underline{e}_k) = i (-\cos\vartheta \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha) - (-\cos\vartheta \sin\varphi \sin\alpha + \cos\varphi \cos\alpha).$$

Damit ergibt sich :

$$(B, IV, 25b) \quad \begin{aligned} ME_{b,a} = & \langle \varphi^b | O_{E2}^{+}(-1) | \varphi^a \rangle \{ (\cos\alpha \cos\varphi \cos 2\vartheta - \sin\alpha \sin\varphi \cos\vartheta) + \\ & + i (\cos\alpha \sin\varphi \cos 2\vartheta + \sin\alpha \cos\varphi \cos\vartheta) \} + \langle \varphi^b | O_{M1}^{+}(-1) | \varphi^a \rangle \cdot \\ & \{ (\cos\vartheta \sin\varphi \sin\alpha - \cos\varphi \cos\alpha) + i (-\cos\vartheta \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha) \}. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir :

$$(B, IV, 26a) \quad \begin{aligned} |ME_{b,a}|^2 = & |\langle \varphi^b | O_{E2}^{+}(-1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 2\vartheta \cos^2 \alpha + \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha) + \\ & + |\langle \varphi^b | O_{M1}^{+}(-1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \\ & + 2 \langle \varphi^b | O_{E2}^{+}(-1) | \varphi^a \rangle \langle \varphi^b | O_{M1}^{+}(-1) | \varphi^a \rangle (-\cos 2\vartheta \cos^2 \alpha - \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

für $M_b - M_a = m = +1$ (analoge Rechnung wie im Fall $m = -1$) :

$$|ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(+1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 2\vartheta \cos^2 \alpha + \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha) +$$

$$(B, IV, 26b) \quad + |\langle \varphi^b | O_{M1}^{\pm}(+1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) +$$

$$+ 2 \langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(+1) | \varphi^a \rangle \langle \varphi^b | O_{M1}^{\pm}(+1) | \varphi^a \rangle (\cos 2\vartheta \cos^2 \alpha + \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$|ME_{b,a}|^2 = |\langle \varphi^b | O_{E2}^{\pm}(0) | \varphi^a \rangle|^2 \cdot \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 2\vartheta +$$

$$(B, IV, 26c) \quad + |\langle \varphi^b | O_{M1}^{\pm}(0) | \varphi^a \rangle|^2 \cdot 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha.$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeit bei spontaner Emission, hervorgerufen durch $O_{E2}^-(m)$ und $O_{M1}^-(m)$, ergibt sich dann :

für $M_b - M_a = m = \pm 2$:

$$(B, IV, 27a) \quad w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 2) | \varphi^a \rangle|^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \alpha \cos^2 \vartheta + \sin^2 \alpha)$$

für $M_b - M_a = m = \pm 1$:

$$w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} \{ |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 2\vartheta \cos^2 \alpha + \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha) +$$

$$(B, IV, 27b) \quad + |\langle \varphi^b | O_{M1}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 (\cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) +$$

$$\pm 2 \langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle \langle \varphi^b | O_{M1}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle (\cos 2\vartheta \cos^2 \alpha + \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha) \}$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 27c) \quad w_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} \{ |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(0) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{3}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 2\vartheta + |\langle \varphi^b | O_{M1}^-(0) | \varphi^a \rangle|^2 \cdot 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha \}.$$

Für die unpolarisierte Übergangswahrscheinlichkeit $\tilde{w}_{a,b}$ erhalten wir

für $M_b - M_a = m = \pm 2$:

$$(B, IV, 28a) \quad \tilde{w}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 2) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta (\cos^2 \vartheta + 1)$$

für $M_b - M_a = m = \pm 1$:

$$(B, IV, 28b) \quad \tilde{W}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left\{ |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) + \right. \\ \left. + |\langle \varphi^b | O_{M1}(\pm 1) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta + 1) + \right. \\ \left. + 2 \langle \varphi^b | O_{E2}^-(\pm 1) | \varphi^a \rangle \langle \varphi^b | O_{M1}(\pm 1) | \varphi^a \rangle \frac{1}{2} (\cos 2\vartheta + \cos 2\vartheta) \right\}$$

für $M_b - M_a = m = 0$:

$$(B, IV, 28c) \quad \tilde{W}_{a,b} = \frac{2\omega}{8\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left\{ |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(0) | \varphi^a \rangle|^2 \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta + |\langle \varphi^b | O_{M1}(0) | \varphi^a \rangle|^2 \sin^2 \vartheta \right\}.$$

Wegen

$$(B, IV, 29) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta + 1) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{3}$$

$$(B, IV, 30) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2\vartheta + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0$$

$$(B, IV, 31) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{3}$$

erhalten wir dann für die totale Übergangswahrscheinlichkeit $\hat{W}_{a,b}^{(m)}$

$$(B, IV, 32) \quad \hat{W}_{a,b}^{(m)} = \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left\{ \frac{8}{5} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(m) | \varphi^a \rangle|^2 + \frac{8}{3} |\langle \varphi^b | O_{M1}(m) | \varphi^a \rangle|^2 \right\}.$$

In dieser Gleichung sind durch die Winkelintegration die vorher noch vorhandenen Mischterme weggefallen. Die Beiträge beider Strahlungen addieren sich einfach.

Für die gemittelte Übergangswahrscheinlichkeit $\bar{W}_{a,b}$ erhalten wir dann :

$$(B, IV, 33) \quad \bar{W}_{a,b} = \frac{1}{23a+1} \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0\hbar c^3} \sum_{M_b, M_a} \left\{ \frac{8}{5} |\langle \varphi^b | O_{E2}^-(M_b - M_a) | \varphi^a \rangle|^2 + \frac{8}{3} |\langle \varphi^b | O_{M1}(M_b - M_a) | \varphi^a \rangle|^2 \right\}.$$

Die Formeln (B, IV, 14), (B, IV, 24) und (B, IV, 33) geben die uns interessierenden, weil mit dem Experiment vergleichbaren gemittelten Übergangswahrscheinlichkeiten für E1-, E2- und M1-Strahlung an. In welcher Stärke die einzelnen Strah-

lungen auftreten können, hängt unter anderem entscheidend von den Matrixelementen der entsprechenden Operatoren ab. Diese sollen in B,V für Übergänge innerhalb von Rotationsbanden berechnet werden.

V. Matrizelemente für Übergänge innerhalb von Rotations-
banden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne

Aus A, II wissen wir, daß alle Niveaus innerhalb einer Rotationsbande die gleiche Parität haben. Deshalb können innerhalb einer Rotationsbande nur M1- und E2-Übergänge, nicht jedoch E1-Übergänge erfolgen. Matrizelemente des Operators O_{E1}^- brauchen deshalb nicht betrachtet zu werden. Im folgenden sollen nun, soweit nötig, die Matrizelemente der beiden Operatoren mit positiver Parität für durch spontane Emission bewirkte Übergänge innerhalb von Rotationsbanden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne berechnet werden.

1. g-g-Kerne

In B, II hatten wir für die Eigenfunktionen eines deformierten g-g-Kerns erhalten :

$$(B, V, 1) \quad \psi_{J_3} = \psi_{J_3}^{L, M, 0} = \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi^2}} D_{M,0}^L(\alpha, \beta, \gamma),$$

wobei L nur geradzahlige Werte annimmt. Diese Eigenfunktion hat die Energie

$$(B, V, 2) \quad E_{J_3} = \hbar \frac{L(L+1)}{2\Theta_0}.$$

Da sich die Drehimpulse für Niveaus innerhalb der Rotationsbande eines g-g-Kerns um $\Delta L \gg 2$ unterscheiden, sind nur E2-Übergänge möglich. Aus (B, III, 27) entnehmen wir den für spontane Emission verantwortlichen Operator

$$(B, V, 3) \quad O_{E2, J_3}^-(m) = + \frac{1}{4\hbar^2} \frac{\omega}{c} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \{ D_{m+1}^2 L_{R+1}^K - D_{m-1}^2 L_{R-1}^K - \hbar\sqrt{3} D_{m,0}^2 \}.$$

Zwischen den Niveaus $\psi_{J_3}^a = \psi_{J_3}^{L+2, M_a, 0}$ und $\psi_{J_3}^b = \psi_{J_3}^{L, M_b, 0}$ müssen wir Matrizelemente

$$(B, V, 4) \quad ME_{b,a} = \langle \psi_{J_3}^{L, M_b, 0} | O_{E2, J_3}^-(M_b - M_a) | \psi_{J_3}^{L+2, M_a, 0} \rangle$$

mit diesem Operator bilden. $(B, V, 1)$ und $(B, V, 3)$ in $(B, V, 4)$ eingesetzt ergibt :

$$(B, V, 5) \quad ME_{b, \alpha} = + \sqrt{\frac{(2L+1)(2L+5)}{8\pi^2}} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\omega}{c} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \cdot \langle D_{M_b,0}^L | D_{M_b-M_a,1}^2 L_{R+1}^K - D_{M_b-M_a,-1}^2 L_{R-1}^K - \sqrt{3} D_{M_b-M_a,0}^2 | D_{M_a,0}^{L+2} \rangle.$$

Wie in C, XVI gezeigt wird, ergibt das verbleibende Matrixelement :

$$(B, V, 6) \quad \langle D_{M_b,0}^L | D_{M_b-M_a,1}^2 L_{R+1}^K - D_{M_b-M_a,-1}^2 L_{R-1}^K - \sqrt{3} D_{M_b-M_a,0}^2 | D_{M_a,0}^{L+2} \rangle = \\ = \frac{8\pi^2}{(2L+1)\hbar} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, L+2, L} \cdot C_{0,0,0}^{2, L+2, L} \Theta_0 \frac{\hbar^2 (2L+3)}{\Theta_0 \sqrt{3}}.$$

Mit Hilfe von (B, V, 2) erkennen wir, daß die Energiedifferenz der betreffenden Niveaus durch die Größe

$$(B, V, 7) \quad E_{33}^{L+2} - E_{33}^L = \frac{\hbar^2 (2L+3)}{\Theta_0} = \hbar \omega$$

gegeben ist, die auch als Faktor beim Matrixelement auftritt. Da diese Energiedifferenz gerade der Energie des emittierten Photons entspricht, können wir also auch hier - allerdings mit einer gänzlich anderen Überlegung als im Falle der Matrixelemente des Quadrupoloperators für Einzelteilchen - die Größe ω aus dem Matrixelement herausziehen, so daß sich letztlich die übliche ω -Abhängigkeit für E2-Strahlung auch nach unseren Rechnungen ergibt. Für das Matrixelement erhalten wir dann

$$(B, V, 8) \quad ME_{b, \alpha} = + \sqrt{\frac{2L+5}{2L+1}} \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{4\sqrt{6}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, L+2, L} C_{0,0,0}^{2, L+2, L} Q_{2,0}$$

und für das in die Endformel eingehende Betragsquadrat des Matrixelements gilt

$$(B, V, 9) \quad |ME_{b, \alpha}|^2 = \frac{\omega^4}{c^2} \frac{1}{96} \frac{2L+5}{2L+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, L+2, L})^2 (C_{0,0,0}^{2, L+2, L})^2 Q_{2,0}^2.$$

2. u-g- und g-u-Kerne

Bei Übergängen innerhalb von Rotationsbanden deformierter u-g- und g-u-Kerne können im allgemeinen M1- und E2-Strahlung gleichzeitig auftreten. In den dafür verantwortlichen Operatoren $O_{M1,ug}^{\pm}(m)$ und $O_{E2,ug}^{\pm}(m)$ sind jeweils die vom Rumpf herkommenden Größen Q_r (proportional dem mittleren quadratischen Ladungsradius des Sphäroids) und Q_{20} (Quadrupolmoment des Sphäroids) enthalten. Aus den elektromagnetischen Übergangswahrscheinlichkeiten des zu dem betrachteten u-g- oder g-u-Kerns zugehörigen g-g-Kerns kann nur die Größe Q_{20} entnommen werden, da innerhalb der Rotationsbande eines g-g-Kerns, wie in B,V,1 gezeigt wurde, nur E2-Übergänge möglich sind. Die Größe Q_r ist uns auf diesem Weg nicht zugänglich. Wenn wir sie etwa aus den aus Streuexperimenten ermittelten Daten gewinnen wollten, dann müßten wir beachten, daß Q_r vom verwendeten Modell, mit dem diese Experimente beschrieben werden, abhängig ist. Auf diese Weise bekämen wir also keinen eindeutig bestimmten Wert für Q_r in die Hand. Deshalb wollen wir auf die Berechnung der M1-Übergangswahrscheinlichkeiten verzichten und auch die Matrixelemente des Operators $O_{M1,ug}^{\pm}(m)$ nicht explizit ausrechnen, obwohl beides im Prinzip möglich wäre.

Wir wenden uns gleich dem für die spontane Emission von E2-Strahlung verantwortlichen Operator $O_{E2,ug}^{\pm}(m)$ zu. Er hat nach (B,III,56) die Form :

$$(B,V,10) \quad O_{E2,ug}^{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \left\{ \frac{1}{4} \frac{Q_{20}}{Q_0} [D_{m+1}^2 J_{+1}^K - D_{m-1}^2 J_{-1}^K - \pm \sqrt{3} D_{m,0}^2] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{Q_{20}}{Q_0} [D_{m+1}^2 J_{+1}^K - D_{m-1}^2 J_{-1}^K] + \frac{1}{2\sqrt{12}} \omega \sum_i D_{m,i}^2 \hat{Q}_{2,i} \right\}.$$

Im folgenden wollen wir sowohl mit den für adiabatische Näherung berechneten Eigenfunktionen $\Psi_{u_g}^0$ und Energien $E_{u_g}^0$ als auch mit den von uns berechneten verbesserten Eigenfunktionen $\Psi_{u_g}^1$ und Energien $E_{u_g}^2$ von H_{u_g} arbeiten, wobei wir stets den Fall $K=\frac{1}{2}$, bei dem zusätzliche Komplikationen auftreten, ausschließen.

- a) Matricelemente mit den in adiabatischer Näherung ermittelten Eigenfunktionen von H_{ug}

Mit (B,II,66) und (B,II,67) gilt :

$$(B,V,11) \quad \Psi_{ug}^0 = \Psi_{ug,\bar{k}}^{0,\bar{J},M,\bar{V}} = \sqrt{\frac{2\bar{J}+1}{16\pi^2}} \{ D_{M,\bar{k}}^{\bar{J}} \Psi_{\bar{V},\bar{k}} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M,-\bar{k}}^{\bar{J}} \Psi_{\bar{V},-\bar{k}} \}$$

$$(B,V,12) \quad E_{ug}^0 = E_{ug,\bar{k}}^{0,\bar{J},\bar{V}} = \frac{\hbar^2 \{ \bar{J}(\bar{J}+1) - \bar{K}^2 \}}{2\Theta_0} + E_{\bar{V},\bar{k}}$$

Betrachten wir zunächst den Übergang $J_a = J+1 \rightarrow J_b = J$. Dieser wird durch das Matricelement

$$(B,V,13) \quad ME_{b,a} = \langle \Psi_{ug,\bar{k}}^{0,\bar{J},M_b,\bar{V}} | O_{E2,ug}^{(M_b-M_a)} | \Psi_{ug,\bar{k}}^{0,\bar{J}+1,M_a,\bar{V}} \rangle$$

bewirkt. Setzen wir die Ausdrücke für $O_{E2,ug}^{(M_b-M_a)}$, $\Psi_{ug,\bar{k}}^{0,\bar{J},M_b,\bar{V}}$ und $\Psi_{ug,\bar{k}}^{0,\bar{J}+1,M_a,\bar{V}}$ ein, so ergibt sich zunächst :

$$(B,V,14) \quad \begin{aligned} ME_{ba} &= + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{(2\bar{J}+1)(2\bar{J}+3)}{16\pi^2 \cdot 16\pi^2}} \\ &\left\{ \frac{1}{4} \frac{Q_{2,0}}{\Theta_0} \langle D_{M_b,\bar{k}}^{\bar{J}} \Psi_{\bar{V},\bar{k}} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M_b,-\bar{k}}^{\bar{J}} \Psi_{\bar{V},-\bar{k}} \right. \\ &\quad \left| D_{M_b-M_a,\bar{k}}^2 \bar{J}_{\bar{k}}^K - D_{M_b-M_a,-\bar{k}}^2 \bar{J}_{-\bar{k}}^K - \hbar\sqrt{3} D_{M_b-M_a,0}^2 - D_{M_b-M_a,\bar{k}}^2 \bar{J}_{\bar{k}}^K + D_{M_b-M_a,-\bar{k}}^2 \bar{J}_{-\bar{k}}^K \right| \\ &\quad \left. | D_{M_a,\bar{k}}^{\bar{J}+1} \Psi_{\bar{V},\bar{k}} + (-1)^{\bar{J}+1+N-\frac{1}{2}} D_{M_a,-\bar{k}}^{\bar{J}+1} \Psi_{\bar{V},-\bar{k}} \rangle \right\} + \frac{1}{2\sqrt{24}} \frac{\omega^2}{c} \sqrt{\frac{(2\bar{J}+1)(2\bar{J}+3)}{16\pi^2 \cdot 16\pi^2}} \cdot \\ &\quad \sum_{\bar{k}} \langle D_{M_b,\bar{k}}^{\bar{J}} \Psi_{\bar{V},\bar{k}} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M_b,-\bar{k}}^{\bar{J}} \Psi_{\bar{V},-\bar{k}} | D_{M_b-M_a,i}^2 Q_{2,i} | \\ &\quad | D_{M_a,\bar{k}}^{\bar{J}+1} \Psi_{\bar{V},\bar{k}} + (-1)^{\bar{J}+1+N-\frac{1}{2}} D_{M_a,-\bar{k}}^{\bar{J}+1} \Psi_{\bar{V},-\bar{k}} \rangle = \\ &= ME_{b,a,1} + \sum_{\bar{k}} ME_{b,a,2}^i. \end{aligned}$$

Wie in C,XVII gezeigt wird, ergibt sich für $ME_{b,a,1}$

$$(B,V,15) \quad ME_{b,a,1} = + \sqrt{\frac{2\bar{J}+3}{2\bar{J}+1}} C_{M_b-M_a,M_a,M_b}^{2,\bar{J}+1,\bar{J}} C_{0,\bar{k},\bar{k}}^{2,\bar{J}+1,\bar{J}} \frac{\omega}{\hbar c} \frac{1}{4\sqrt{6}} \frac{\hbar^2(\bar{J}+1)}{\Theta_0} Q_{2,0}$$

und für $ME_{b,a,2}$

$$(B, V, 16) \quad ME_{b,a,2}^i = + \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0,\bar{\kappa},\bar{\kappa}}^{2,3+1,3} \frac{\omega^2}{C} \frac{1}{4\sqrt{6}} \langle \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} \rangle \delta_{i,0}.$$

Wegen

$$(B, V, 17) \quad E_{u_3,\bar{\kappa}}^{0,3+1,\bar{\nu}} - E_{u_3,\bar{\kappa}}^{0,3,\bar{\nu}} = \frac{\hbar^2(3+1)}{\Theta_0} = \hbar\omega$$

tritt auch hier wieder wie im Fall des g-g-Kerns die gleich $\hbar\omega$ gesetzte Energiedifferenz (in adiabatischer Näherung durch Θ_0^{-1} bestimmt) vor das Matricelement, so daß wir auch in diesem Fall die richtige ω -Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit für E2-Strahlung erhalten. Weiter gilt :

$$(B, V, 18) \quad ME_{b,a} = + \frac{\omega^2}{4\sqrt{6}C} \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0,\bar{\kappa},\bar{\kappa}}^{2,3+1,3} \{ Q_{2,0} + \langle \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} \rangle \}$$

$$(B, V, 19) \quad |ME_{b,a}|^2 = \frac{\omega^4}{96C^2} \frac{23+3}{23+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3})^2 (C_{0,\bar{\kappa},\bar{\kappa}}^{2,3+1,3})^2 |Q_{2,0} + \langle \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} \rangle|^2.$$

Für den Übergang $J_a = J + 2 \rightarrow J_b = J$ erhalten wir in völlig analoger Rechnung :

$$(B, V, 20) \quad |ME_{b,a}|^2 = \frac{\omega^4}{96C^2} \frac{23+5}{23+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+2,3})^2 (C_{0,\bar{\kappa},\bar{\kappa}}^{2,3+2,3})^2 |Q_{2,0} + \langle \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} \rangle|^2.$$

- b) Matricelemente mit den in erster Ordnung berechneten Eigenfunktionen von H_{ug}

Nach (B,II,68) und (B,II,69) gilt :

$$(B, V, 21) \quad \begin{aligned} \psi_{u_3}^1 &= \psi_{u_3,\bar{\kappa}}^{1,3,M,\bar{\nu}} = |\bar{\nu},3,M,\bar{\kappa}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{\sqrt{(3+\bar{\kappa})(3-\bar{\kappa}+1)}}{\sum_{\bar{\nu}} \frac{\langle \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}-1} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} \rangle}{E_{\bar{\nu},\bar{\kappa}-1} - E_{\bar{\nu},\bar{\kappa}}}} |\bar{\nu},3,M,\bar{\kappa}-1\rangle \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{\sqrt{(3-\bar{\kappa})(3+\bar{\kappa}+1)}}{\sum_{\bar{\nu}} \frac{\langle \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}+1} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{\nu},\bar{\kappa}} \rangle}{E_{\bar{\nu},\bar{\kappa}+1} - E_{\bar{\nu},\bar{\kappa}}}} |\bar{\nu},3,M,\bar{\kappa}+1\rangle \end{aligned}$$

$$(B, V, 22) \quad E_{ug}^2 = E_{u_3}^{2,3} = \frac{\hbar^2 3(3+1)}{2\Theta_{eff}(\bar{\nu},\bar{\kappa})} + A(\bar{\nu},\bar{\kappa}).$$

Betrachten wir auch hier zunächst den Übergang $J_a = J+1 \rightarrow J_b = J$. Hierfür ist das Matricelement

$$(B, V, 23) \quad ME_{b,a}^1 = \langle \varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3, M_b, \bar{v}} | O_{E_2, u_3}^- (M_b - M_a) | \varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3+1, M_a, \bar{v}} \rangle$$

verantwortlich. Setzen wir die Ausdrücke für $O_{E_2, u_3}^- (M_b - M_a)$, $\varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3, M_b, \bar{v}}$ und $\varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3+1, M_a, \bar{v}}$ ein, so ergibt sich zunächst:

$$(B, V, 24) \quad ME_{b,a}^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \frac{Q_{2,0}}{4\Theta_0} \langle \varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3, M_b, \bar{v}} | D_{M_b - M_a, +1}^2 J_{+1}^K - D_{M_b - M_a, -1}^2 J_{-1}^K - \\ - \hbar \sqrt{3} D_{M_b - M_a, 0}^2 - D_{M_b - M_a, +1}^2 J_{+1}^K + D_{M_b - M_a, -1}^2 J_{-1}^K | \varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3+1, M_a, \bar{v}} \rangle + \\ + \frac{1}{2\sqrt{24}} \frac{\omega^2}{c} \sum_{\bar{c}} \langle \varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3, M_b, \bar{v}} | D_{M_b - M_a, i}^2 \hat{Q}_{2,i} | \varphi_{u_3, \bar{k}}^{1,3+1, M_a, \bar{v}} \rangle = ME_{b,1}^1 + ME_{b,2}^1.$$

Wie in C, XVIII gezeigt wird, erhalten wir für $ME_{b,a,1}^1$

$$(B, V, 25) \quad ME_{b,a,1}^1 = +\frac{1}{4\sqrt{6}} \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3} \frac{\omega}{\hbar c} \frac{\hbar^2 (3+1)}{\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})} Q_{2,0}$$

und für $ME_{b,a,2}^1$ ergibt sich

$$(B, V, 26) \quad ME_{b,a,2}^1 = +\frac{1}{4\sqrt{6}} \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3} \frac{\omega^2}{c} Q_{2,0}^{T1}$$

wobei gilt:

$$(B, V, 27) \quad Q_{2,0}^{T1} = \langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle + \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} \frac{(3^2 - \bar{k}^2 + 23 + 3\bar{k})}{\bar{k}} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | \hat{J}_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}-1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} \frac{(3^2 - \bar{k}^2 + 23 - 3\bar{k})}{\bar{k}} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | \hat{J}_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}+1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}}.$$

In (B, V, 25) tritt die Größe $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})$ auf. Da diese, wie in A, II gezeigt wurde, die Energiedifferenz zwischen Niveaus innerhalb einer Rotationsbande bestimmt, läßt sich auch hier wieder die gleich $\hbar\omega$ gesetzte Energiedifferenz

$$(B, V, 28) \quad E_{u_3}^{2,3+1} - E_{u_3}^{2,3} = \frac{\hbar^2 (3+1)}{\Theta_{\text{eff}}(\bar{v}, \bar{k})} = \hbar\omega$$

zwischen den am Übergang beteiligten Niveaus vor das Matrixelement ziehen. Wir können an dieser Stelle also fest-

stellen :

Nicht nur bei der Berechnung von Rotationsenergien, sondern auch bei der Ermittlung von Matrixelementen von E2-Strahlung tritt bei Verwendung unserer verbesserten Näherung die Größe $\Theta_{\text{eff}}(\nu, K)$ entscheidend in Erscheinung. Bei adiabatischer Näherung gilt das gleiche für die Größe Θ_0 .

Mit den obigen Formeln erhalten wir dann für das gesamte Matrixelement :

$$(B, V, 29) \quad ME_{b,a}^1 = + \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0,\bar{K},\bar{K}}^{2,3+1,3} \frac{\omega^2}{c} \frac{1}{4\sqrt{6}} \{Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T_1}\}$$

und für dessen Betragsquadrat ergibt sich :

$$(B, V, 30) \quad |ME_{b,a}^1|^2 = \frac{23+3}{23+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3})^2 (C_{0,\bar{K},\bar{K}}^{2,3+1,3})^2 \frac{\omega^4}{9c^2} |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T_1}|^2.$$

Durch völlig analoge Überlegungen erhalten wir für den Übergang $J_a = J+2 \rightarrow J_b = J$ für das Betragsquadrat des entsprechenden Matrixelements :

$$(B, V, 31) \quad |ME_{b,a}^2|^2 = \frac{23+5}{23+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+2,3})^2 (C_{0,\bar{K},\bar{K}}^{2,3+2,3})^2 \frac{\omega^4}{9c^2} |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T_2}|^2,$$

wobei gilt :

$$(B, V, 32) \quad \begin{aligned} Q_{2,0}^{T_2} = & \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle + \\ & + \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} (3-2\bar{K}) \sum_{\nu} \frac{\langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle}{E_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} - \\ & - \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} (3+2\bar{K}) \sum_{\nu} \frac{\langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle}{E_{\bar{\nu}, \bar{K}+1} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} . \end{aligned}$$

VI. Totale gemittelte E2-Übergangswahrscheinlichkeiten für Übergänge innerhalb von Rotationsbanden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne bei spontaner Emission

In B,IV hatten wir für die gemittelte E2-Übergangswahrscheinlichkeit bei spontaner Emission erhalten :

$$(B,VI,1) \quad \bar{w}_{\bar{a},\bar{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \cdot \frac{\omega}{c^3} \cdot \frac{1}{2J_a+1} \cdot \frac{8}{5} \sum_{M_a, M_b} |\langle \psi^b | O_{E2}^{-}(M_b-M_a) | \psi^a \rangle|^2.$$

In B,V wurden für g-g-, u-g- und g-u-Kerne die Betragsquadrate der entsprechenden Matrixelemente berechnet. Wenn wir mit diesen Größen in (B,VI,1) eingehen, dann ergeben sich sofort die gesuchten E2-Übergangswahrscheinlichkeiten.

1. Übergänge von $L+2 \rightarrow L$ in der Rotationsbande eines g-g-Kerns

Es gilt nach (B,V,9)

$$(B,VI,2) \quad |\langle \psi_{33}^b | O_{E2,33}^{-}(M_b-M_a) | \psi_{33}^a \rangle|^2 = \frac{\omega^4}{c^2} \frac{1}{96} \frac{2L+5}{2L+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,L+2,L})^2 (C_{0,0,0}^{2,L+2,L})^2 Q_{2,0}^2.$$

In (B,VI,1) eingehend erhalten wir damit

$$(B,VI,3) \quad \bar{w}_{\bar{a},\bar{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{\omega^5}{c^5} \frac{1}{60(2L+1)} (C_{0,0,0}^{2,L+2,L})^2 \sum_{M_a, M_b} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,L+2,L})^2 Q_{2,0}^2.$$

Mit

$$(B,VI,4) \quad (C_{0,0,0}^{2,L+2,L})^2 = \frac{3(L+2)(L+1)}{2(2L+5)(2L+3)} ; \quad \sum_{M_a, M_b} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,L+2,L})^2 = 2L+1$$

gilt dann schließlich :

$$(B,VI,5) \quad \bar{w}_{\bar{a},\bar{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{\omega^5}{c^5} \frac{1}{40} \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+5)(2L+3)} Q_{2,0}^2.$$

2. Übergänge von $J+1 \rightarrow J$ in der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns

Es gilt nach (B,V,30) bzw. (B,V,19)

$$(B,VI,6) \quad |\langle \psi_{u_g}^b | O_{E2,u_g}^- (M_b - M_a) | \psi_{u_g}^a \rangle|^2 = \frac{\omega^4}{C^2} \frac{1}{96} \frac{2\bar{J}+3}{2\bar{J}+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{J}+1, \bar{J}})^2 (C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{J}+1, \bar{J}})^2 |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T1}|^2,$$

wobei Q_{20}^{T1} bei adiabatischer Näherung durch $\langle \psi_{\bar{r}, \bar{K}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{r}, \bar{K}} \rangle$ und bei unserer verbesserten Näherung durch (B,V,27) gegeben ist. Damit gehen wir in (B,VI,1) ein und erhalten

$$(B,VI,7) \quad \bar{W}_{\bar{a}, \bar{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{\omega^5}{C^5} \frac{1}{60(2\bar{J}+1)} (C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{J}+1, \bar{J}})^2 \sum_{M_a, M_b} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{J}+1, \bar{J}})^2 |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T1}|^2.$$

Mit

$$(B,VI,8) \quad (C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{J}+1, \bar{J}})^2 = \frac{24\bar{K}(\bar{J}+\bar{K}+1)(\bar{J}-\bar{K}+1)}{(2\bar{J}+4)(2\bar{J}+3)(2\bar{J}+2)2\bar{J}} \quad ; \quad \sum_{M_a, M_b} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{J}+1, \bar{J}})^2 = 2\bar{J}+1$$

gilt dann schließlich

$$(B,VI,9) \quad \bar{W}_{\bar{a}, \bar{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{\omega^5}{C^5} \frac{2}{5} \frac{(\bar{J}+\bar{K}+1)(\bar{J}-\bar{K}+1)\bar{K}}{(2\bar{J}+4)(2\bar{J}+3)(2\bar{J}+2)2\bar{J}} |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T1}|^2.$$

3. Übergänge von $J+2 \rightarrow J$ in der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns

Es gilt nach (B,V,31) bzw. (B,V,20)

$$(B,VI,10) \quad |\langle \psi_{u_g}^b | O_{E2,u_g}^- (M_b - M_a) | \psi_{u_g}^a \rangle|^2 = \frac{\omega^4}{C^2} \frac{1}{96} \frac{2\bar{J}+5}{2\bar{J}+1} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{J}+2, \bar{J}})^2 (C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{J}+2, \bar{J}})^2 |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T2}|^2,$$

wobei Q_{20}^{T2} bei adiabatischer Näherung durch und bei unserer verbesserten Näherung durch (B,V,32) gegeben ist. Damit gehen wir in (B,VI,1) ein und erhalten

$$(B,VI,11) \quad \bar{W}_{\bar{a}, \bar{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{\omega^5}{C^5} \frac{1}{60(2\bar{J}+1)} (C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{J}+2, \bar{J}})^2 \sum_{M_a, M_b} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{J}+2, \bar{J}})^2 |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T2}|^2.$$

Mit

$$(B, VI, 12) \quad (C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}})^2 = \frac{6 \cdot (\bar{3}+\bar{k}+2)(\bar{3}+\bar{k}+1)(\bar{3}-\bar{k}+2)(\bar{3}-\bar{k}+1)}{(2\bar{3}+5)(2\bar{3}+4)(2\bar{3}+3)(2\bar{3}+2)}$$

$$\sum_{M_b, M_a} (C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}})^2 = 2\bar{3}+1$$

gilt dann schließlich :

$$(B, VI, 13) \quad \tilde{W}_{\bar{a}, \bar{b}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{\omega^5}{c^5} \frac{1}{10} \frac{(\bar{3}+\bar{k}+2)(\bar{3}+\bar{k}+1)(\bar{3}-\bar{k}+2)(\bar{3}-\bar{k}+1)}{(2\bar{3}+5)(2\bar{3}+4)(2\bar{3}+3)(2\bar{3}+2)} \cdot |Q_{2,0} + Q_{2,0}^{T_2}|^2$$

VII. Diskussion der Ergebnisse

Die in B,VI ermittelten Ergebnisse für E2-Übergänge innerhalb von Rotationsbanden deformierter g-g-, u-g- und g-u-Kerne sollen nun diskutiert werden, wobei auch allgemeine Aspekte unserer Modellrechnungen zur Sprache kommen.

1. Diskussion der Ergebnisse für E2-Übergänge bei g-g-Kernen

Unsere Formel (B,VI,5) stimmt mit dem aus der Literatur [9] allgemein bekannten Ausdruck völlig überein. Dies ist zunächst recht verwunderlich, da die bisherigen Rechnungen den g-g-Kern als Vielteilchensystem betrachtet haben, während wir ihn bei unseren Modellrechnungen von vorneherein durch ein starres homogen geladenes Sphäroid dargestellt haben.

Sehen wir uns jedoch die früheren Rechnungen genauer an, so stellen wir fest, daß ihnen allen im wesentlichen immer der folgende Gedankengang zugrunde liegt. Zur Beschreibung der kollektiven Rotationen des g-g-Kerns wird auf meist nicht näher definierte Weise ein körperfestes Koordinatensystem eingeführt, dessen Orientierung bezüglich des raumfesten Koordinatensystems durch die drei Eulerschen Winkel α, β, γ festgelegt wird. Bezüglich dieses körperfesten Systems werden die A Nukleonen des Kerns mit $3A$ Koordinaten $\underline{q}_i^K$ beschrieben. Für das gesamte Gebilde hat man also drei Koordinaten zuviel. Das führt dazu, daß die Eulerschen Winkel und die Koordinaten $\underline{q}_i^K$ nicht unabhängig voneinander sind, sondern daß zwischen ihnen noch drei Gleichungen bestehen.

Die Wellenfunktion für ein Rotationsniveau des g-g-Kerns wird dann als Produkt $D_{M,O}^L(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \psi(\underline{q}_i^K)$ angesetzt, wobei sichtlich durch den Faktor $D_{M,O}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ die kollektive Rotation des Gebildes berücksichtigt werden soll. Der zunächst in raumfesten Koordinaten gegebene elektrische Quadrupoltensor $Q_{2,m}(\underline{q}_i)$ des i-ten Nukleons wird mit Hilfe der $D_{m,v}^2(\alpha, \beta, \gamma)$ durch den in körperfesten Koordinaten ausgedrückten Quadrupoltensor $Q_{2,v}(\underline{q}_i^K)$ ersetzt.

Bei der Berechnung des für die E2-Strahlung verantwortlichen Matrixelements, bei dem über die Quadrupoltenso-
ren aller A Nukleonen zu summieren ist, wird nun ohne Berücksichtigung der vorhandenen Abhängigkeiten zwischen den q_i^K und den Eulerschen Winkeln getrennt über q_i^K und α, β, γ integriert, wobei die auftretende Größe $\langle \Psi(q_i^K) | \sum Q_{2,0}(q_i^K) | \Psi(q_i^K) \rangle$ meist einfach gleich einer noch durch Anpassung ans Experiment zu bestimmenden Konstanten $Q_{2,0}$ gesetzt wird. (Verwendet man zur Berechnung von $Q_{2,0}$ etwa Wellenfunktionen, die mit Hilfe einer recht aufwendigen selbstkonsistenten Rechnung gewonnen wurden, dann ergibt sich ein gegenüber dem Experiment um den Faktor 2 bis 3 zu kleiner Wert für Kerne in der Lanthaniden Region [31].) Mit dem so eingeführten $Q_{2,0}$ ergibt sich dann die gleiche Endformel wie bei unseren Rechnungen.

Wegen der aufgezeigten Unklarheiten scheint uns die gesamte Methode jedoch recht fragwürdig zu sein. Sie stellt mit Sicherheit nicht die exakte Behandlung der Ausstrahlung eines Vielteilchensystems dar. Aus der Tatsache, daß die mit dieser Methode erhaltenen Ergebnisse mit den nach unseren Rechnungen gewonnenen übereinstimmen, kann man schließen, daß die eben geschilderte Behandlung des Problems wegen der Einführung redundanter Variabler letztlich nur den Aspekt der Ausstrahlung eines starr rotierenden Gebildes liefert.

Da unsere Modellrechnungen mit eindeutig definierten Koordinaten auf quantenmechanisch und mathematisch völlig exaktem Weg auch die E2-Übergänge zwischen den Niveaus einer kollektiven Rotationsbande eines g-g-Kerns liefern, also in einfacher und übersichtlicher Weise das gleiche leisten wie die undurchsichtigen und fragwürdigen früheren Rechnungen, sind sie jenen unbedingt vorzuziehen.

Die Anwendung der Formel (B,VI,5) besteht darin, daß aus den experimentell gemessenen Übergangswahrscheinlichkeiten die Größe $Q_{2,0}$ und daraus mit Hilfe der bekannten Beziehung

$$(B,VII,1) \quad Q_{2,0} = Z e R_0^2 \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{14}} \beta \left(1 + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{14}} \beta\right)$$

die Deformation β des betreffenden, durch ein homogen geladenes Sphäroid dargestellten, g-g-Kerns ermittelt werden kann. Man verwendet dazu die experimentell gemessene Lebensdauer τ_{exp} des 2^+ -Zustands in der Grundzustandsrotationsbande des betreffenden g-g-Kerns, der durch E2-Strahlung und die damit konkurrierende innere Konversion in den 0^+ -Zustand übergeht. Mit Hilfe des aus Tabellen [32] zu entnehmenden Faktors α (α gibt das Verhältnis zwischen der Zahl der ausgesandten Konversionselektronen und der der emittierten γ -Quanten an.) kann dann die experimentelle Übergangswahrscheinlichkeit $\bar{w}_{\text{exp}}$ des betrachteten E2-Übergangs zu

$$(B, VII, 2) \quad \bar{w}_{\text{exp}} = \frac{1}{1+\alpha} \frac{1}{\tau_{\text{exp}}}$$

bestimmt werden. Wegen der in τ_{exp} und α enthaltenen Ungenauigkeiten ist $Q_{2,0}$ und damit auch β mit gewissen Fehlern behaftet.

2. Diskussion der Ergebnisse für E2-Übergänge bei u-g- und g-u-Kernen

Auch die Formeln (B, VI, 9) und (B, VI, 13) sind bereits aus der Literatur bekannt, wobei allerdings die dabei auftretende Größe $Q_{2,0}^T$ nur in adiabatischer Näherung bestimmt wurde und die zur Herleitung der Formeln gemachten Überlegungen aus den gleichen Gründen wie beim g-g-Kern zu kritisieren sind, wogegen unsere Formeln völlig exakt hergeleitet wurden.

Der Beitrag $Q_{2,0}^T$ rührt vom Außenteilchen her und sollte bei Verwendung der verbesserten Näherung unsere Ergebnisse gegenüber den früheren verändern. Da $Q_{2,0}$ Beiträge von Z oder Z-1 Nukleonen, $Q_{2,0}^T$ jedoch nur Beiträge von einem Nukleon mit der effektiven Ladung e^{**} enthält, ist, wie die Rechnung zeigt, der durch $Q_{2,0}^T$ hinzukommende Zusatz etwa nur einige Prozent von $Q_{2,0}$. Wenn man den mit den früheren Formeln aus den Übergangswahrscheinlichkeiten ermittelten Wert [33] für das Quadrupolmoment des u-g- bzw. g-u-Kerns mit dem des dazugehörigen g-g-Kerns vergleicht, so stellt man fest, daß beide Werte im allgemeinen bis auf einige Prozent übereinstimmen, was nach unseren

Rechnungen ja zu erwarten ist.

Die durch $Q_{2,0}^T$ bewirkten Änderungen sind so klein, daß ein Vergleich mit dem Experiment infolge der experimentellen Ungenauigkeiten und der auch hier wieder eingehenden Unsicherheiten bei der Bestimmung von α nicht möglich ist. Dies gilt umsomehr, als es wegen der bei Übergängen mit $J_a = J+1$, $J_b = J$ gleichzeitig auftretenden M1-Strahlung praktisch unmöglich ist, den Beitrag zur Lebensdauer eines durch E2- und M1-Strahlung sowie durch innere Konversion gleichzeitig zerfallenden Niveaus, der von der E2-Strahlung allein kommt, mit der nötigen Genauigkeit zu ermitteln.

Sollten es jedoch genauere experimentelle Ergebnisse möglich machen, die E2-Übergangswahrscheinlichkeiten exakter zu extrahieren, dann kann versucht werden, unsere Formeln auch bezüglich des Außenteilchenbeitrags $Q_{2,0}^T$ zu testen.

Schlußbemerkung

In Teil A wurden die stationären Zustände innerhalb von Rotationsbanden deformierter u-g-, g-u- und u-u-Kerne unter Verwendung des bekannten, einfachen, kollektiven Kernmodells, bestehend aus einem starren, symmetrischen, deformierten g-g-Rumpf und ein oder zwei Außenteilchen, durch konsequente Störungsrechnung untersucht. Dabei wurde besonderes Gewicht auf das noch nicht befriedigend geklärte Problem des effektiven Trägheitsmoments einer kollektiven Rotationsbande eines u-g-, g-u- oder u-u-Kerns gelegt und außerdem der nur bei u-u-Kernen auftretende Einfluß der Restwechselwirkung V_{PN} auf Lage und Struktur der Rotationsbanden diskutiert.

Die berechneten Ergebnisse für die effektiven Trägheitsmomente ergaben für die von uns ausgewählten Kerne, bei denen das experimentelle Einteilchenenergiespektrum einigermaßen gut mit dem verwendeten Nilssonmodell beschrieben werden konnte, überraschend gute Übereinstimmung mit den aus dem Experiment extrahierten Werten. Dies ist umso bedeutsamer, als bei unseren Rechnungen keine freien Parameter verwendet wurden, sondern die Eigenschaften des g-g-Rumpfes, wie Deformation β und Trägheitsmoment Θ_0 einfach gleich denen des entsprechenden freien g-g-Kerns gesetzt wurden, also keine Änderung des Rumpfes angenommen wurde.

Die bei u-u-Kernen auf Grund der Existenz von V_{PN} theoretisch vorhergesagten Feinheiten in den effektiven Trägheitsmomenten zusammengehöriger Rotationsbanden (aufbauend auf gleiche, aber verschieden gekoppelte Protonen- und Neutronennilsson-niveaus) werden vom Experiment ausnahmslos bestätigt.

Die noch bestehenden Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment sollten sich in späteren Untersuchungen durch Verwendung besserer Einteilchenwellenfunktionen beseitigen lassen.

Nachdem sich das einfache Modell zur Berechnung der stationären Zustände recht gut bewährt hatte, sollten damit in Teil B die elektromagnetischen Übergänge zwischen den Niveaus innerhalb von kollektiven Rotationsbanden deformierter g-g-, g-u- und

u-g-Kerne untersucht werden. Im Gegensatz zu den bisherigen Rechnungen, bei denen die Rotationsbewegung des Kerns mit zusätzlichen Variablen systemfremd angeheftet wurde, beschreiben wir die betrachteten Kerne durch ein homogen geladenes Sphäroid mit keinem bzw. einem Außenteilchen ohne Verwendung redundanter Variabler und führen gleichzeitig in Strenge die Kopplung mit dem Strahlungsfeld durch. Durch diese Behandlung des Problems wird eine vertiefte Einsicht in das Zustandekommen von elektromagnetischen Übergängen bei einem solchen Gebilde gewonnen. Die im Rahmen der grundlegenden Behandlung erhaltenen Ergebnisse wurden im Fall von E2-Strahlung mit denen von früheren Rechnungen verglichen, bei denen angeblich die Vielteilchennatur des Kerns berücksichtigt wurde. Aus der Übereinstimmung der Ergebnisse beider Rechnungen für g-g-Kerne kann geschlossen werden, daß die früheren Rechnungen in verschleierter Form und mit fragwürdigen Methoden unter Verwendung redundanter Variabler letztlich auch nur auf der von uns in klarer und mathematisch exakter Weise durchgerechneten einfachen Modellvorstellung beruhten. Mit den explizit hergeleiteten Ausdrücken der Wechselwirkungsterme zwischen den betrachteten Kernen und dem Strahlungsfeld können in späteren Arbeiten auch E1- und M1-Übergänge in gleicher Strenge betrachtet werden. Durch Hinzunahme eines zweiten Außenteilchens ist auch hier die bei den stationären Zuständen bereits durchgeführte Erweiterung auf u-u-Kerne möglich.

Teil C

Anhang, Herleitung der Formeln für Teil A und Teil B

I. Störungsrechnung der Terme H_C und H_A

Mit den Basisfunktionen $|\varphi, \mathfrak{z}, M, K\rangle$ soll auf dem Niveau $|\bar{\varphi}, \mathfrak{z}, M, \bar{K}\rangle$ Störungsrechnung gemacht werden. Für die gestörte Wellenfunktion $\Psi_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}$ machen wir folgenden Ansatz :

$$(C, I, 1) \quad \Psi_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}} = \sum_{\varphi', K'} C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(0)} |\varphi', K', M, \mathfrak{z}\rangle + \sum_{\varphi', K'} C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(1)} |\varphi', K', M, \mathfrak{z}\rangle + \\ + \sum_{\varphi', K'} C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(2)} |\varphi', K', M, \mathfrak{z}\rangle + \dots$$

Die zu $\Psi_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}$ gehörige Energie $E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}$ wird analog entwickelt :

$$(C, I, 2) \quad E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}} = E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}^{(0)} + E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}^{(1)} + E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}^{(2)} + \dots$$

Dabei bedeuten die Indizes (0), (1), (2), daß die entsprechenden Größe von nullter, erster oder zweiter Ordnung sein soll. Mit den Ansätzen (C, I, 1) und (C, I, 2) gehen wir in die Schrödingergleichung :

$$(C, I, 3) \quad (H_I^{(0)} + H_C^{(1)} + H_A^{(2)}) \Psi_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}} = E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}} \Psi_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}$$

ein und erhalten sofort :

$$(C, I, 4) \quad (H_I^{(0)} + H_C^{(1)} + H_A^{(2)}) \cdot \\ \sum_{\varphi', K'} \{ C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(0)} |\varphi', \mathfrak{z}, M, K'\rangle + C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(1)} |\varphi', \mathfrak{z}, M, K'\rangle + C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(2)} |\varphi', \mathfrak{z}, M, K'\rangle + \dots \} = \\ = (E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}^{(0)} + E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}^{(1)} + E_{\bar{\varphi}, \bar{R}, \mathfrak{z}}^{(2)} + \dots) \cdot \\ \sum_{\varphi', K'} \{ C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(0)} |\varphi', \mathfrak{z}, M, K'\rangle + C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(1)} |\varphi', \mathfrak{z}, M, K'\rangle + C_{\varphi', K', \mathfrak{z}}^{(2)} |\varphi', \mathfrak{z}, M, K'\rangle + \dots \} \cdot$$

Betrachten wir als erstes nur Größen nullter Ordnung,
so reduziert sich (C,I,4) zu :

$$(C,I,5) \quad H_I^{(0)} \sum_{K',J'} C_{\gamma,K',J}^{(0)} |\gamma,J,M,K'\rangle = E_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} \sum_{K',J'} C_{\gamma,K',J}^{(0)} |\gamma,J,M,K'\rangle.$$

Multiplikation von links mit $\langle \bar{\gamma}, J, M, \bar{K} |$ und Integration
ergibt :

$$(C,I,6a) \quad E_{\bar{\gamma},\bar{K}} C_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} = E_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} C_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} \quad (\text{für } \bar{K} \neq 0)$$

$$(C,I,6b) \quad \frac{1}{2} \{ [1+(-1)^J] E_{\bar{\gamma},0} + [1-(-1)^J] E_{\bar{\gamma},0} \} C_{\bar{\gamma},0,\bar{J}}^{(0)} = E_{\bar{\gamma},0,\bar{J}}^{(0)} C_{\bar{\gamma},0,\bar{J}}^{(0)}.$$

Daraus erhält man sofort

$$(C,I,7) \quad E_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} = E_{\bar{\gamma},\bar{K}} \quad (\text{für } K \neq 0)$$

$$(C,I,8) \quad E_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} = \frac{1}{2} \{ [1+(-1)^J] E_{\bar{\gamma},0} + [1-(-1)^J] E_{\bar{\gamma},0} \} = E_{\bar{\gamma},0}.$$

Dabei ist bei der Abkürzung $E_{\bar{\gamma},0}$ zu beachten, daß diese
für gerades und ungerades J verschiedene Werte annimmt.

Multiplikation der Gleichung (C,I,5) von links mit
 $\langle \gamma, J, M, K |$ und Integration ergibt :

$$(C,I,9) \quad E_{\gamma,K} C_{\gamma,K,J}^{(0)} = E_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} C_{\gamma,K,J}^{(0)} = E_{\bar{\gamma},\bar{K}} C_{\gamma,K,J}^{(0)} \Rightarrow$$

$$(C,I,10) \quad C_{\gamma,K,J}^{(0)} = 0 \quad \text{für } (\gamma,K) \neq (\bar{\gamma},\bar{K}), \text{ da } E_{\gamma,K} \neq E_{\bar{\gamma},\bar{K}}.$$

Also ergibt sich in nullter Ordnung :

$$(C,I,11) \quad E_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} = E_{\bar{\gamma},\bar{K}}, \quad C_{\bar{\gamma},\bar{K},\bar{J}}^{(0)} = 1, \quad C_{\gamma,K,J}^{(0)} = 0 \quad \text{für } (\gamma,K) \neq (\bar{\gamma},\bar{K}).$$

Betrachten wir nun die Größen erster Ordnung in
Gleichung (C,I,4), so erhalten wir unter Verwendung
der Ergebnisse nullter Ordnung :

$$(C, I, 12) \quad H_I \sum_{\nu, K'} c_{\nu, K', \bar{z}}^{(1)} |\nu, \bar{z}, M, K'\rangle + H_c |\bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K}\rangle =$$

$$E_{\bar{\nu}, \bar{K}} \sum_{\nu, K'} c_{\nu, K', \bar{z}}^{(1)} |\nu, \bar{z}, M, K'\rangle + E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)} |\bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K}\rangle.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $\langle \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} |$ und integrieren, dann ergibt sich :

$$(C, I, 13) \quad c_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)} E_{\bar{\nu}, \bar{K}} + \langle \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} | H_c | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = c_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)} E_{\bar{\nu}, \bar{K}} + E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)}.$$

Damit erhalten wir für die Störenergie erster Ordnung :

$$(C, I, 14) \quad E_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)} = \langle \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} | H_c | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle.$$

Multiplikation der Gleichung (C, I, 12) von links mit $\langle \nu, \bar{z}, M, K |$ und Integration ergibt :

$$(C, I, 15) \quad c_{\nu, K, \bar{z}}^{(1)} E_{\nu, K} + \langle \nu, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = c_{\nu, K, \bar{z}}^{(1)} E_{\bar{\nu}, \bar{K}} \quad (\nu, K) \neq (\bar{\nu}, \bar{K}).$$

Damit erhält man für die Koeffizienten $c_{\nu, K, \bar{z}}^{(1)}$ für die in erster Ordnung gestörte Wellenfunktion :

$$(C, I, 16) \quad c_{\nu, K, \bar{z}}^{(1)} = - \frac{\langle \nu, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle}{E_{\nu, K} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} \quad (\nu, K) \neq (\bar{\nu}, \bar{K})$$

und für die gestörte Wellenfunktion $\psi_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)}$ erhalten wir in erster Ordnung :

$$(C, I, 17) \quad \psi_{\bar{\nu}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)} = |\bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K}\rangle - \sum_{(\nu, K) \neq (\bar{\nu}, \bar{K})} \frac{\langle \nu, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle}{E_{\nu, K} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}}.$$

Diese Wellenfunktion ist bis auf Größen zweiter Ordnung auf 1 normiert.

Wenden wir uns den Größen zweiter Ordnung aus Gleichung (C, I, 4) zu, so erhalten wir unter Benützung der Ergebnisse nullter Ordnung :

$$\begin{aligned}
 & H_I \sum_{r',k'} C_{r',k',\bar{z}}^{(2)} |r',\bar{z},M,K'\rangle + H_C \sum_{r',k'} C_{r',k',\bar{z}}^{(1)} |r',\bar{z},M,K'\rangle + \\
 (C,I,18) \quad & + H_A |\bar{r},\bar{z},M,\bar{K}\rangle = E_{\bar{r},\bar{K}} \sum_{r',k'} C_{r',k',\bar{z}}^{(2)} |r',\bar{z},M,K'\rangle + \\
 & + E_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(1)} \sum_{r',k'} C_{r',k',\bar{z}}^{(1)} |r',\bar{z},M,K'\rangle + E_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(2)} |\bar{r},\bar{z},M,\bar{K}\rangle .
 \end{aligned}$$

Multiplikation dieser Gleichung von links mit
und Integration liefert unter Benützung der Ergebnisse
erster Ordnung :

$$\begin{aligned}
 & E_{\bar{r},\bar{K}} C_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(2)} + \langle \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} | H_A | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle - \\
 (C,I,19) \quad & \sum_{(r,K) \neq (\bar{r},\bar{K})} \frac{\langle r,\bar{z},M,K | H_C | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle}{E_{r,K} - E_{\bar{r},\bar{K}}} \langle \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} | H_C | r,\bar{z},M,K \rangle = \\
 & = E_{\bar{r},\bar{K}} C_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(2)} + E_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(2)} .
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Störenergie in zweiter Ordnung :

$$\begin{aligned}
 & E_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(2)} = \langle \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} | H_A | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle - \\
 (C,I,20) \quad & - \sum_{(r,K) \neq (\bar{r},\bar{K})} \frac{|\langle r,\bar{z},M,K | H_C | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle|^2}{E_{r,K} - E_{\bar{r},\bar{K}}} .
 \end{aligned}$$

II. Berechnung der Matrixelemente von H_C und H_A

Die von uns benützten Basisfunktionen hatten folgende Form :

$$(C, II, 1a) \quad |\varphi, \underline{3}, M, K\rangle = \sqrt{\frac{2\underline{3}+1}{16\pi^2}} \left\{ \Psi_{\underline{V}, K} D_{M, K}^{\underline{3}} + (-1)^{\underline{3}+\sum_i (M_i - \frac{1}{2})} \Psi_{\underline{V}, -K} D_{M, -K}^{\underline{3}} \right\} \quad K > 0$$

$$(C, II, 1b) \quad |\varphi, \underline{3}, M, 0\rangle = \sqrt{\frac{2\underline{3}+1}{16\pi^2}} \Psi_{\underline{V}, 0}^{\underline{3}} D_{M, 0}^{\underline{3}}, \quad \Psi_{\underline{V}, 0}^{\underline{3}} \text{ ist } \underline{3}\text{-abhängig.}$$

Dabei hängt $D_{M, K}^{\underline{J}}$ nur von den Eulerschen Winkeln, $\Psi_{\underline{V}, K}$ und $\Psi_{\underline{V}, 0}^{\underline{3}}$ hängen nur von den Außenteilchenkoordinaten ab. Die Operatoren H_C und H_A haben die folgende Gestalt :

$$(C, II, 2) \quad H_C = \frac{1}{\Theta_0} \{ \underline{3}_+ \underline{3}_- + \underline{3}_- \underline{3}_+ \} ; \quad H_A = \frac{1}{2\Theta_0} \{ \underline{3}^2 - \underline{3}_z^2 \}.$$

Dabei wirkt $\underline{J}$ nur auf die Eulerschen Winkel, $\underline{j}$ nur auf die Außenteilchenkoordinaten.

Berechnen wir zunächst die Diagonalelemente von H_A . Trivialerweise gilt :

$$(C, II, 3) \quad H_A |\bar{\varphi}, \underline{3}, M, \bar{K}\rangle = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \{ \underline{3}(\underline{3}+1) - \bar{K}^2 \} |\bar{\varphi}, \underline{3}, M, \bar{K}\rangle.$$

Also folgt sofort :

$$(C, II, 4) \quad \langle \bar{\varphi}, \underline{3}, M, \bar{K} | H_A | \bar{\varphi}, \underline{3}, M, \bar{K} \rangle = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \{ \underline{3}(\underline{3}+1) - \bar{K}^2 \}.$$

Da $|\varphi, \underline{3}, M, K\rangle$ Mitglied eines ON-Systems und außerdem Eigenfunktion zu H_A ist, besitzt H_A nur Diagonalelemente.

Als nächstes wollen wir Diagonal- und Nichtdiagonalelemente von H_C berechnen. Es gilt für $\bar{K} \neq 0$:

$$H_C |\bar{\varphi}, \underline{3}, M, \bar{K}\rangle = \frac{\hbar}{12\Theta_0} \sqrt{\frac{2\underline{3}+1}{16\pi^2}}$$

$$(C, II, 5) \quad \left\{ -\sqrt{(\underline{3}+\bar{K})(\underline{3}-\bar{K}+1)} D_{M, \bar{K}-1}^{\underline{3}} \underline{j}_- \Psi_{\bar{\varphi}, \bar{K}} + \sqrt{(\underline{3}-\bar{K})(\underline{3}+\bar{K}+1)} D_{M, \bar{K}+1}^{\underline{3}} \underline{j}_+ \Psi_{\bar{\varphi}, \bar{K}} + \right. \\ \left. + (-1)^{\underline{3}+\sum_i (M_i - \frac{1}{2})} \left[-\sqrt{(\underline{3}-\bar{K})(\underline{3}+\bar{K}+1)} D_{M, -\bar{K}-1}^{\underline{3}} \underline{j}_- \Psi_{\bar{\varphi}, -\bar{K}} + \sqrt{(\underline{3}+\bar{K})(\underline{3}-\bar{K}+1)} D_{M, -\bar{K}+1}^{\underline{3}} \underline{j}_+ \Psi_{\bar{\varphi}, -\bar{K}} \right] \right\}.$$

Damit erhalten wir für das Diagonalelement von H_C :

$$\begin{aligned} (C, II, 6) \quad & \langle \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} | H_C | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = \\ & = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+N-\frac{1}{2}} (\bar{z}+\frac{1}{2}) \{ -\langle \psi_{\bar{z}-\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{z}-\frac{1}{2}} \rangle + \langle \psi_{\bar{z}, \frac{1}{2}} | j_{+1} | \psi_{\bar{z}, -\frac{1}{2}} \rangle \} \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wie in C,V gezeigt wird, erfüllen die von uns verwendeten Außenteilchenwellenfunktionen die Beziehung :

$$(C, II, 7) \quad \langle \psi_{\bar{z}, \frac{1}{2}} | j_{+1} | \psi_{\bar{z}, -\frac{1}{2}} \rangle = - \langle \psi_{\bar{z}, -\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{z}, \frac{1}{2}} \rangle.$$

Dann folgt für das Diagonalelement :

$$\begin{aligned} (C, II, 8) \quad & \langle \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} | H_C | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = \\ & = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\frac{1}{2}} (\bar{z}+\frac{1}{2}) (-1)^N \langle \psi_{\bar{z}-\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{z}, \frac{1}{2}} \rangle \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für die Fälle $\bar{K} \neq 0, 1$, $K \neq 0, 1$ ergibt sich zunächst für die Nichtdiagonalelemente von H_C

$$\begin{aligned} (C, II, 9) \quad & \langle \bar{\nu}, \bar{z}, M, K | H_C | \bar{\nu}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = \\ & - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\bar{z}+K)(\bar{z}-\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, \bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{z}, \bar{K}} \rangle \delta_{K, \bar{K}-1} + \\ & + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\bar{z}-\bar{K})(\bar{z}+\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, \bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{z}, \bar{K}} \rangle \delta_{K, \bar{K}+1} - \\ & - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\bar{z}-\bar{K})(\bar{z}+\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, -\bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{z}, -\bar{K}} \rangle \delta_{-K, -\bar{K}-1} + \\ & + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\bar{z}+\bar{K})(\bar{z}-\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, -\bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{z}, -\bar{K}} \rangle \delta_{-K, -\bar{K}+1} - \\ & - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\sum_i (N_i-\frac{1}{2})} \sqrt{(\bar{z}-\bar{K})(\bar{z}+\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, -\bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{z}, -\bar{K}} \rangle \delta_{K, -\bar{K}-1} + \\ & + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\sum_i (N_i-\frac{1}{2})} \sqrt{(\bar{z}+\bar{K})(\bar{z}-\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, -\bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{z}, -\bar{K}} \rangle \delta_{K, -\bar{K}+1} - \\ & - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\sum_i (N_i-\frac{1}{2})} \sqrt{(\bar{z}+\bar{K})(\bar{z}-\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, \bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{z}, \bar{K}} \rangle \delta_{-K, \bar{K}-1} + \\ & + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\sum_i (N_i-\frac{1}{2})} \sqrt{(\bar{z}-\bar{K})(\bar{z}+\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{z}, \bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{z}, \bar{K}} \rangle \delta_{-K, \bar{K}+1}. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, daß H_I und H mit dem Paritätsoperator vertauschen, über H_C also nur Basisfunktionen mit gleicher Parität, diese ist $(-1)^{\sum N_i}$, gekoppelt werden können und somit für $|\psi, \bar{z}, M, K\rangle$ und $|\bar{\psi}, \bar{z}, M, \bar{K}\rangle$ der gleiche Faktor $(-1)^{\sum N_i}$ auftritt. Da $\bar{K} \neq 0, 1$, $K \neq 0, 1$ vorausgesetzt wird, gilt:

$$(C, II, 10) \quad \delta_{K, -\bar{K}-1} = 0, \quad \delta_{K, -\bar{K}+1} = \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}}, \quad \delta_{-K, \bar{K}-1} = \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}}, \quad \delta_{-K, \bar{K}+1} = 0$$

Mit Hilfe der in C,V bewiesenen Formeln

$$(C, II, 11) \quad \langle \psi, -\bar{K}+1 | j_{+1} | \psi, -\bar{K} \rangle = - \langle \psi, \bar{K}-1 | j_{-1} | \psi, \bar{K} \rangle$$

$$(C, II, 12) \quad \langle \psi, -\bar{K}-1 | j_{-1} | \psi, -\bar{K} \rangle = - \langle \psi, \bar{K}+1 | j_{+1} | \psi, \bar{K} \rangle$$

$$(C, II, 13) \quad \langle \psi, j_{\pm \frac{1}{2}} | j_{\pm 1} | \psi, j_{\mp \frac{1}{2}} \rangle = - \langle \psi, j_{\mp \frac{1}{2}} | j_{\mp 1} | \psi, j_{\pm \frac{1}{2}} \rangle$$

erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} & \langle \psi, \bar{z}, M, K | H_C | \bar{\psi}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle = \\ (C, II, 14) \quad & \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)} \langle \psi, \bar{K}+1 | j_{+1} | \psi, \bar{K} \rangle \delta_{K, \bar{K}+1} - \\ & - \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \langle \psi, \bar{K}-1 | j_{-1} | \psi, \bar{K} \rangle \delta_{K, \bar{K}-1} + \\ & + \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{3+N+\frac{1}{2}} (3+\frac{1}{2}) \langle \psi, j_{-\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi, j_{\frac{1}{2}} \rangle \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Spezialfall $\bar{K} = 0$.

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} & H_C | \bar{\psi}, \bar{z}, M, 0 \rangle = \\ (C, II, 15) \quad & \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{\frac{23+1}{16\pi^2}} \sqrt{3(3+1)} \left\{ -D_{M-1}^3 j_{-1} \psi_{\bar{z},0}^3 + D_{M+1}^3 j_{+1} \psi_{\bar{z},0}^3 \right\}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\langle \varphi, \vec{z}, M, K | H_c | \vec{r}, \vec{z}, M, \vec{K} \rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{\vec{z}(\vec{z}+1)}.$$

$$(C, II, 16) \quad \left\{ -\langle \psi_{\vec{r}-1} | j_{-1} | \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} \rangle \delta_{K,-1} + \langle \psi_{\vec{r},1} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} \rangle \delta_{K,+1} + \right. \\ \left. + (-1)^{j+\sum_i (N_i - \frac{1}{2})} [-\langle \psi_{\vec{r}-1} | j_{-1} | \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} \rangle \delta_{-K,-1} + \langle \psi_{\vec{r},1} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} \rangle \delta_{-K,+1}] \right\}.$$

Wegen :

$$(C, II, 17) \quad \delta_{K,-1} = \delta_{-K,+1} = 0$$

$$(C, II, 18) \quad \langle \psi_{\vec{r}-1} | j_{-1} | \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} \rangle = (-1)^{j+\sum_i (N_i - \frac{1}{2})+1} \langle \psi_{\vec{r},1} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} \rangle$$

erhält man dann sofort :

$$(C, II, 19) \quad \langle \varphi, \vec{z}, M, K | H_c | \vec{r}, \vec{z}, M, \vec{K} \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{\vec{z}(\vec{z}+1)} \langle \psi_{\vec{r},1} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} \rangle \delta_{K,1}.$$

Für den Spezialfall $\vec{K} = 1$ erhalten wir :

$$(C, II, 20) \quad \begin{aligned} & \langle \varphi, \vec{z}, M, K | H_c | \vec{r}, \vec{z}, M, 1 \rangle = \\ & -\frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{\vec{z}(\vec{z}+1)} \langle \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} | j_{-1} | \psi_{\vec{r},1} \rangle \delta_{K,0} + \\ & + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\vec{z}-1)(\vec{z}+2)} \langle \psi_{\vec{r},2} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},1} \rangle \delta_{K,2} - \\ & - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\vec{z}-1)(\vec{z}+2)} \langle \psi_{\vec{r}-2} | j_{-1} | \psi_{\vec{r}-1} \rangle \delta_{K,-2} - \\ & - \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{j+\sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \sqrt{(\vec{z}-1)(\vec{z}+2)} \langle \psi_{\vec{r}-2} | j_{-1} | \psi_{\vec{r}-1} \rangle \delta_{K,-2} + \\ & + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{j+\sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \sqrt{\vec{z}(\vec{z}+1)} \langle \psi_{\vec{r},0}^{\vec{z}} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},1} \rangle \delta_{K,0} + \\ & + \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{j+\sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \sqrt{(\vec{z}-1)(\vec{z}+2)} \langle \psi_{\vec{r},2} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},1} \rangle \delta_{K,2}. \end{aligned}$$

Wegen :

$$(C, II, 21) \quad \delta_{K,-2} = \delta_{-K,2} = 0$$

$$(C, II, 22) \quad \langle \psi_{\vec{r}-2} | j_{-1} | \psi_{\vec{r}-1} \rangle = -\langle \psi_{\vec{r},2} | j_{+1} | \psi_{\vec{r},1} \rangle$$

$$(C, II, 23) \quad \langle \psi_{v,0}^3 | j_{+1} | \psi_{\bar{v},-1} \rangle = -(-1)^{j + \sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \langle \psi_{v,0}^3 | j_{-1} | \psi_{\bar{v},1} \rangle$$

gilt dann sofort :

$$(C, II, 24) \quad \langle v, j, M, K | H_c | \bar{v}, j, M, 1 \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2} Q_0} [\sqrt{j(j-1)(j+2)} \langle \psi_{v,2} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},1} \rangle \delta_{K,2} - \sqrt{j(j+1)} \langle \psi_{v,0}^3 | j_{-1} | \psi_{\bar{v},1} \rangle \delta_{K,0}] .$$

Damit sind alle benötigten Diagonal- und Nichtdiagonalelemente von H_C und H_A berechnet. Da die auftretenden Außenteilchenmatrixelemente reell sind, sind alle obigen Matrixelemente reell.

III. Berechnung der Störenergien erster und zweiter Ordnung

In C,I hatten wir erhalten :

$$(C,III,1) \quad \mathcal{E}_{\bar{r},\bar{z},\bar{z}}^{(1)} = \langle \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} | H_c | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle.$$

Mit (C,II,8) aus C,II

$$(C,III,2) \quad \begin{aligned} &\langle \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} | H_c | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\frac{1}{2}} (\bar{z}+\frac{1}{2}) (-1)^N \langle \psi_{\bar{r},-\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{r},\frac{1}{2}} \rangle \delta_{\bar{K},\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

gilt sofort :

$$(C,III,3) \quad \mathcal{E}_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(1)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\frac{1}{2}} (\bar{z}+\frac{1}{2}) (-1)^N \langle \psi_{\bar{r},-\frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{r},\frac{1}{2}} \rangle \delta_{\bar{K},\frac{1}{2}}.$$

In die aus C,I entnommene Formel

$$(C,III,4) \quad \mathcal{E}_{\bar{r},\bar{K},\bar{z}}^{(2)} = - \sum_{(\bar{r},K) \neq (\bar{r},\bar{K})} \frac{|\langle \bar{r},\bar{z},M,K | H_c | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle|^2}{E_{\bar{r},K} - E_{\bar{r},\bar{K}}} + \langle \bar{r},\bar{z},M,K | H_A | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle$$

setzen wir für $\bar{K} \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ die folgende Formel aus C,II ein.

$$(C,III,5) \quad \begin{aligned} &\langle \bar{r},\bar{z},M,K | H_c | \bar{r},\bar{z},M,\bar{K} \rangle = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{r},\bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{r},\bar{K}} \rangle \delta_{K,\bar{K}-1} + \\ &+ \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)} \langle \psi_{\bar{r},\bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{r},\bar{K}} \rangle \delta_{K,\bar{K}+1}. \end{aligned}$$

Nach Betragsquadratbildung unter Ausnützung der Kroneckersymbole und nach einer Umrechnung, die nötig ist, um die Energie in die Anteile Rotationsenergie des Bandenkopfs und Rotationsenergie relativ zum Bandenkopf zerlegen zu können,

$$\begin{aligned}
 & |\langle \psi, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{v}, \bar{z}, M, \bar{K} \rangle|^2 = \\
 (C, III, 6) \quad & + \frac{\hbar^2}{2\Theta_0^2} [3(\bar{z}+1) - \bar{K}(\bar{K}+1)] \{ |\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}-1} | \bar{z}-1 | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2 \delta_{K, \bar{K}-1} + |\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}+1} | \bar{z}+1 | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2 \delta_{K, \bar{K}+1} \} \\
 & + \frac{2\hbar^2}{2\Theta_0^2} \bar{K} |\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}-1} | \bar{z}-1 | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2 \delta_{K, \bar{K}-1}
 \end{aligned}$$

erhalten wir dann unter Benützung des Diagonalelements von H_A :

$$\begin{aligned}
 (C, III, 7) \quad & \mathcal{E}_{\bar{v}, \bar{K}, \bar{z}}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} [3(\bar{z}+1) - \bar{K}(\bar{K}+1)] \cdot \\
 & \cdot \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\bar{v}} \left(\frac{|\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}-1} | \bar{z}-1 | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\bar{v}, \bar{K}-1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}+1} | \bar{z}+1 | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\bar{v}, \bar{K}+1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} \right) \right) + \\
 & + \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \bar{K} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\bar{v}} \frac{|\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}-1} | \bar{z}-1 | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\bar{v}, \bar{K}-1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} \right).
 \end{aligned}$$

Für $\bar{K} = \frac{1}{2}$ -Banden gilt :

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{v}, \bar{z}, M, \frac{1}{2} \rangle = \\
 (C, III, 8) \quad & + \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(\bar{z}-\frac{1}{2})(\bar{z}+\frac{3}{2})} \langle \psi_{\bar{v}, \frac{3}{2}} | \bar{z}+1 | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle \delta_{K, \frac{3}{2}} + \\
 & + \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} (-1)^{\bar{z}+M+\frac{1}{2}} (\bar{z}+\frac{1}{2}) \langle \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} | \bar{z}-1 | \psi_{\bar{v}, \frac{3}{2}} \rangle \delta_{K, \frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Betragsbildung ergibt unter Ausnützung der Kronecker-symbole :

$$\begin{aligned}
 & |\langle \psi, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{v}, \bar{z}, M, \frac{1}{2} \rangle|^2 = \\
 (C, III, 9) \quad & + \frac{\hbar^2}{2\Theta_0^2} [3(\bar{z}+1) - \frac{3}{4}] \{ |\langle \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} | \bar{z}-1 | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2 \delta_{K, \frac{1}{2}} + |\langle \psi_{\bar{v}, \frac{3}{2}} | \bar{z}+1 | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2 \delta_{K, \frac{3}{2}} \} + \\
 & + \frac{\hbar^2}{2\Theta_0^2} |\langle \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} | \bar{z}-1 | \psi_{\bar{v}, \frac{1}{2}} \rangle|^2.
 \end{aligned}$$

Dann erhalten wir mit Einbeziehung des Diagonalelements von H_A :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{v}, \frac{1}{2}, 3}^{(2)} &= \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \left[3(3+1) - \frac{3}{4} \right] \cdot \\ (C, III, 10) \quad &\cdot \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \left\{ \sum_{\gamma \neq \bar{\gamma}} \frac{|\langle \psi_{\gamma, \frac{1}{2}} | j-1 | \psi_{\bar{\gamma}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \frac{1}{2}} - E_{\bar{\gamma}, \frac{1}{2}}} + \sum_{\gamma} \frac{|\langle \psi_{\gamma, \frac{1}{2}} | j+1 | \psi_{\bar{\gamma}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \frac{1}{2}} - E_{\bar{\gamma}, \frac{1}{2}}} \right\} \right) \\ &+ \frac{\hbar^2}{4\Theta_0^2} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\gamma \neq \bar{\gamma}} \frac{|\langle \psi_{\gamma, \frac{1}{2}} | j-1 | \psi_{\bar{\gamma}, \frac{1}{2}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \frac{1}{2}} - E_{\bar{\gamma}, \frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Für $\bar{K}=0$ -Banden hatten wir in C, II erhalten :

$$(C, III, 11) \quad \langle v, 3, M, K | H_c | \bar{v}, 3, M, 0 \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{3(3+1)} \langle \psi_{v,1} | j+1 | \psi_{\bar{v},0}^3 \rangle \delta_{K,1}.$$

Dann folgt :

$$(C, III, 12) \quad |\langle v, 3, M, K | H_c | \bar{v}, 3, M, 0 \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0^2} 3(3+1) |\langle \psi_{v,1} | j+1 | \psi_{\bar{v},0}^3 \rangle|^2.$$

Unter Benützung des Diagonalelements von H_A ergibt sich :

$$(C, III, 13) \quad \varepsilon_{\bar{v}, 0, 3}^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \cdot \sum_{\gamma} \frac{|\langle \psi_{v,1} | j+1 | \psi_{\bar{v},0}^3 \rangle|^2}{E_{v,1} - E_{\bar{v},0}} \right) \cdot 3(3+1).$$

Für $\bar{K}=1$ -Banden hatten wir in C, II erhalten :

$$\begin{aligned} (C, III, 14) \quad &\langle v, 3, M, K | H_c | \bar{v}, 3, M, 1 \rangle = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \{ \sqrt{(3-1)(3+2)} \langle \psi_{v,2} | j+1 | \psi_{\bar{v},1} \rangle \delta_{K,2} - \sqrt{3(3+1)} \langle \psi_{v,0}^3 | j-1 | \psi_{\bar{v},1} \rangle \delta_{K,0} \}. \end{aligned}$$

Dann ergibt Betragsquadratbildung unter Berücksichtigung der Kroneckersymbole :

$$\begin{aligned} (C, III, 15) \quad &|\langle v, 3, M, K | H_c | \bar{v}, 3, M, 1 \rangle|^2 = \\ &+ \frac{\hbar^2}{2\Theta_0^2} [3(3+1) - 2] \{ |\langle \psi_{v,2} | j+1 | \psi_{\bar{v},1} \rangle|^2 \delta_{K,2} + |\langle \psi_{v,0}^3 | j-1 | \psi_{\bar{v},1} \rangle|^2 \delta_{K,0} \} \\ &+ \frac{\hbar^2}{\Theta_0^2} |\langle \psi_{v,0}^3 | j-1 | \psi_{\bar{v},1} \rangle|^2 \delta_{K,0}. \end{aligned}$$

Mit dem Diagonalelement von H_A erhalten wir dann :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\bar{r},1,\bar{z}}^{(2)} &= \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} [\bar{z}(\bar{z}+1)-2] \cdot \\
 (C, III, 16) \quad &\cdot \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\gamma} \left(\frac{|\langle \Psi_{\gamma,0}^{\bar{z}} | j-1 | \Psi_{\bar{r},1} \rangle|^2}{E_{\gamma,0} - E_{\bar{r},1}} + \frac{|\langle \Psi_{\gamma,2}^{\bar{z}} | j+1 | \Psi_{\bar{r},1} \rangle|^2}{E_{\gamma,2} - E_{\bar{r},1}} \right) \right) \\
 &+ \frac{\hbar^2}{2\Theta_0} \left(1 - \frac{2}{\Theta_0} \sum_{\gamma} \frac{|\langle \Psi_{\gamma,0}^{\bar{z}} | j-1 | \Psi_{\bar{r},1} \rangle|^2}{E_{\gamma,0} - E_{\bar{r},1}} \right) .
 \end{aligned}$$

IV. Berechnung der in erster Ordnung gestörten Wellenfunktion

In die in C,I ermittelte Formel

$$(C, IV, 1) \quad \psi_{\bar{r}, \bar{z}, \bar{z}}^{(1)} = |\bar{r}, \bar{z}, M, \bar{R}\rangle - \sum_{\bar{r}} \frac{\langle \bar{r}, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{r}, \bar{z}, M, \bar{R} \rangle}{E_{\bar{r}, K} - E_{\bar{r}, \bar{R}}} |\bar{r}, \bar{z}, M, K\rangle$$

setzen wir die Matrixelemente aus C,III

$$(C, IV, 2) \quad \begin{aligned} \langle \bar{r}, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{r}, \bar{z}, M, \bar{R} \rangle = \\ - \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} \sqrt{(3+\bar{R})(3-\bar{R}+1)} \langle \psi_{\bar{r}, \bar{R}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{R}} \rangle \delta_{K, \bar{R}-1} + \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} \sqrt{(3-\bar{R})(3+\bar{R}+1)} \langle \psi_{\bar{r}, \bar{R}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{r}, \bar{R}} \rangle \delta_{K, \bar{R}+1} + \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} (3+\frac{1}{2}) (-1)^{\bar{z}+\frac{1}{2}} (-1)^N \langle \psi_{\bar{r}, \frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{r}, \frac{1}{2}} \rangle \delta_{K, \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(C, IV, 3) \quad \langle \bar{r}, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{r}, \bar{z}, M, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \Theta_0} \sqrt{3(3+1)} \langle \psi_{\bar{r}, 1} | j_{+1} | \psi_{\bar{r}, 0} \rangle \delta_{K, 1}$$

$$(C, IV, 4) \quad \begin{aligned} \langle \bar{r}, \bar{z}, M, K | H_c | \bar{r}, \bar{z}, M, 1 \rangle = \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} \{ \sqrt{(3-1)(3+2)} \langle \psi_{\bar{r}, 2} | j_{+1} | \psi_{\bar{r}, 1} \rangle \delta_{K, 2} - \sqrt{3(3+1)} \langle \psi_{\bar{r}, 0} | j_{-1} | \psi_{\bar{r}, 1} \rangle \delta_{K, 0} \} \end{aligned}$$

ein. Für Banden mit $\bar{K} \neq 0$ erhalten wir :

$$(C, IV, 5) \quad \begin{aligned} \psi_{\bar{r}, \bar{K}, \bar{z}}^{(1)} = |\bar{r}, \bar{z}, M, \bar{K}\rangle + \\ + \frac{1}{\sqrt{2} \Theta_0} \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \sum_{\bar{r}} \frac{\langle \psi_{\bar{r}, \bar{R}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{R}} \rangle}{E_{\bar{r}, \bar{R}-1} - E_{\bar{r}, \bar{R}}} \{ 1 - \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}} \} |\bar{r}, \bar{z}, M, \bar{R}-1\rangle - \\ - \frac{1}{\sqrt{2} \Theta_0} (-1)^{\bar{z}+\frac{1}{2}} (-1)^N \sum_{\bar{r} \neq \bar{r}} \frac{\langle \psi_{\bar{r}, \frac{1}{2}} | j_{-1} | \psi_{\bar{r}, \frac{1}{2}} \rangle}{E_{\bar{r}, \frac{1}{2}} - E_{\bar{r}, \frac{1}{2}}} \delta_{\bar{K}, \frac{1}{2}} |\bar{r}, \bar{z}, M, \frac{1}{2}\rangle - \\ - \frac{1}{\sqrt{2} \Theta_0} \sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)} \sum_{\bar{r}} \frac{\langle \psi_{\bar{r}, \bar{R}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{r}, \bar{R}} \rangle}{E_{\bar{r}, \bar{R}+1} - E_{\bar{r}, \bar{R}}} |\bar{r}, \bar{z}, M, \bar{R}+1\rangle, \end{aligned}$$

und für $\bar{K}=0$ -Banden ergibt sich :

$$(C, IV, 6) \quad \psi_{\bar{r},0,3}^{(1)} = |\bar{r},3,M,0\rangle - \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sum_j \frac{\langle \psi_{\bar{r},1} | j_{+1} | \psi_{\bar{r},0}^3 \rangle}{E_{\bar{r},1} - E_{\bar{r},0}} |\bar{r},3,M,1\rangle.$$

V. Matrixelemente von Außenteilchenwellenfunktionen für u-g- und g-u-Kerne

1. Matrixelemente von Schrauboperatoren

Wie in A,III erläutert wurde, wollen wir für u-g- und g-u-Kerne die folgende Außenteilchenwellenfunktion verwenden :

$$(C,V,1) \quad \Psi_{\nu,K} = \sum_{\ell,\tau} N_{\ell,\tau}^{\nu,K} R_{\tau,\ell}^N Y_{K-\tau}^{\ell} \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei ist $n=(N-1)/2$ die Radialquantenzahl, $N_{\ell,\tau}^{\nu,K}$ sind die modifizierten Nilssonkoeffizienten, für die gilt :

$$(C,V,2) \quad N_{\ell,\tau}^{\nu,K} = N_{\ell,-\tau}^{\nu,-K}.$$

Zur Berechnung von Matrixelementen von Schrauboperatoren müssen mit Hilfe einer inversen Clebsch-Gordan-Summe die Terme $Y_{K-\tau}^{\ell}$ und $\chi_{\tau}^{\frac{1}{2}}$ zu Wellenfunktionen $f_K^{\dot{j},\ell}$ gekoppelt werden, die Eigenfunktionen zu $\underline{j}^2$, $\underline{1}^2$ und j_3 sind.

$$(C,V,3) \quad Y_{K-\tau}^{\ell} \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}} = \sum_{\dot{j}} C_{K-\tau,\tau,K}^{\ell,\frac{1}{2},\dot{j}} f_K^{\dot{j},\ell}.$$

Dann gilt :

$$(C,V,4) \quad \Psi_{\nu,K} = \sum_{\ell,\dot{j},\tau} N_{\ell,\tau}^{\nu,K} C_{K-\tau,\tau,K}^{\ell,\frac{1}{2},\dot{j}} R_{\tau,\ell}^N f_K^{\dot{j},\ell}.$$

Für die Wirkung der Schrauboperatoren $j_{\pm 1}$ auf $f_K^{\dot{j},\ell}$ gilt :

$$(C,V,5) \quad \dot{j}_{\pm 1} f_K^{\dot{j},\ell} = \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(\dot{j} \mp K)(\dot{j} \pm K + 1)} f_{K \pm 1}^{\dot{j},\ell}.$$

Unter Ausnützung der Orthonormalität der $f_K^{\dot{j},\ell}$ und der $R_{\tau,\ell}^N$ erhalten wir dann :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\gamma, K} | j_{\pm 1} | \psi_{\bar{\gamma}, K} \rangle &= \\
 (C, V, 6) \quad &= \sum_{l, l', \tau, \tau', j, j'} N_{l, \tau}^{\gamma, K} \cdot N_{l', \tau'}^{\bar{\gamma}, K} \cdot C_{K-\tau, \tau', K}^{l, \frac{1}{2}, j} \cdot C_{K-\tau', \tau, K}^{l', \frac{1}{2}, j'} \\
 &\cdot \delta_{l, l'} \delta_{j, j'} \delta_{m, m'} \left(\mp \frac{\hbar}{12} \right) \sqrt{(j \mp K)(j \pm K + 1)} \delta_{K, K+1}.
 \end{aligned}$$

Damit läßt sich die Summation reduzieren und es gilt :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\gamma, K} | j_{\pm 1} | \psi_{\bar{\gamma}, K} \rangle &= \\
 (C, V, 7) \quad &= \sum_{l, j, \tau, \tau'} N_{l, \tau}^{\gamma, K \pm 1} N_{l, \tau'}^{\bar{\gamma}, K} \cdot C_{K \pm 1 - \tau, \tau, K \pm 1}^{l, \frac{1}{2}, j} \cdot C_{K - \tau', \tau', K}^{l, \frac{1}{2}, j} \left(\mp \frac{\hbar}{12} \right) \sqrt{(j \mp K)(j \pm K + 1)} \delta_{K, K \pm 1} \delta_{\gamma, \bar{\gamma}}.
 \end{aligned}$$

Es gibt also nur Kopplung mit solchen Niveaus, die aus der gleichen Hauptquantenschale stammen und $K = \bar{K} \pm 1$ haben.

Für diese Matrixelemente wollen wir die in C, II benötigten Beziehungen herleiten. Es gilt :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\gamma, K \pm 1} | j_{\pm 1} | \psi_{\bar{\gamma}, K} \rangle &= \\
 (C, V, 8) \quad &= \sum_{l, j, \tau, \tau'} N_{l, \tau}^{\gamma, K \pm 1} N_{l, \tau'}^{\bar{\gamma}, K} \cdot C_{K \pm 1 - \tau, \tau, K \pm 1}^{l, \frac{1}{2}, j} \cdot C_{K - \tau', \tau', K}^{l, \frac{1}{2}, j} \left(\mp \frac{\hbar}{12} \right) \sqrt{(j \pm K)(j \mp K + 1)} \delta_{M, \bar{M}}.
 \end{aligned}$$

Wegen :

$$(C, V, 9) \quad N_{l, -\tau}^{\gamma, K \pm 1} = N_{l, \tau}^{\gamma, K \mp 1}, \quad N_{l, -\tau'}^{\bar{\gamma}, K} = N_{l, \tau'}^{\bar{\gamma}, K}$$

$$(C, V, 10) \quad C_{-K \pm 1 + \tau, -\tau, K \pm 1}^{l, \frac{1}{2}, j} = (-1)^{j - l - \frac{1}{2}} C_{K \mp 1 - \tau, \tau, K \mp 1}^{l, \frac{1}{2}, j}$$

$$(C, V, 11) \quad C_{-K + \tau', -\tau', K}^{l, \frac{1}{2}, j} = (-1)^{j - l - \frac{1}{2}} C_{K - \tau', \tau', K}^{l, \frac{1}{2}, j}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\gamma, K \pm 1} | j_{\pm 1} | \psi_{\bar{\gamma}, K} \rangle &= \\
 (C, V, 12) \quad &= - \sum_{l, j, \tau, \tau'} N_{l, \tau}^{\gamma, K \mp 1} N_{l, \tau'}^{\bar{\gamma}, K} \cdot C_{K \mp 1 - \tau, \tau, K \mp 1}^{l, \frac{1}{2}, j} \cdot C_{K - \tau', \tau', K}^{l, \frac{1}{2}, j} \left(\pm \frac{\hbar}{12} \right) \sqrt{(j \pm K)(j \mp K + 1)} \delta_{M, \bar{M}}.
 \end{aligned}$$

Vergleich mit (C,V,7) ergibt :

$$(C,V,13) \quad \langle \Psi_{\bar{v}, -\bar{K} \pm 1} | j_{\pm 1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle = - \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{K} \mp 1} | j_{\mp 1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle.$$

Durch Spezialisierung sind damit für u-g- und g-u-Kerne die in C,II und C,XVIII benötigten Beziehungen bewiesen.

Jetzt sollen noch die in C,XVIII zusätzlich benötigten Beziehungen hergeleitet werden. Es gilt :

$$(C,V,14) \quad \Psi_{\bar{v}, \bar{K} \pm 1} = \sum_{\ell, j, \tau} N_{\ell, \tau}^{\bar{v}, \bar{K} \pm 1} C_{\bar{K} \pm 1 - \tau, \tau, \bar{K} \pm 1}^{\ell, \frac{1}{2}, j} R_{\eta, \ell}^N f_{\bar{K} \pm 1}^{j, \ell}.$$

Wegen

$$(C,V,15) \quad j_{\pm 1} f_{\bar{K} \mp 1}^{j, \ell} = \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(j_{\mp}(\bar{K} \mp 1))(j_{\pm}(\bar{K} \mp 1) + 1)} f_{\bar{K}}^{j, \ell}$$

folgt dann

$$(C,V,16) \quad \begin{aligned} j_{\pm 1} \Psi_{\bar{v}, \bar{K} \mp 1} = \\ \sum_{\ell, j, \tau} N_{\ell, \tau}^{\bar{v}, \bar{K} \mp 1} C_{\bar{K} \mp 1 - \tau, \tau, \bar{K} \mp 1}^{\ell, \frac{1}{2}, j} \left(\mp \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{(j_{\mp} \bar{K} + 1)(j_{\pm} \bar{K})} R_{\eta, \ell}^N f_{\bar{K}}^{j, \ell}. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$(C,V,17) \quad \begin{aligned} \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{K}} | j_{\pm 1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{K} \mp 1} \rangle = \\ \sum_{\ell, j, \tau, \tau'} N_{\ell, \tau}^{\bar{v}, \bar{K} \mp 1} N_{\ell, \tau'}^{\bar{v}, \bar{K}} C_{\bar{K} \mp 1 - \tau, \tau, \bar{K} \mp 1}^{\ell, \frac{1}{2}, j} C_{\bar{K} - \tau', \tau', \bar{K}}^{\ell, \frac{1}{2}, j} \left(\mp \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{(j_{\mp} \bar{K} + 1)(j_{\pm} \bar{K})}. \end{aligned}$$

Vergleich mit (C,V,7) liefert schließlich :

$$(C,V,18) \quad \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{K}} | j_{\pm 1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{K} \mp 1} \rangle = - \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{K} \mp 1} | j_{\mp 1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle.$$

Damit sind die in C,XVIII benötigten Beziehungen allesamt bewiesen.

2. Matrizelemente des Quadrupoltensors

Für die sphärischen Komponenten des inneren Quadrupoltensors hatten wir nach (B,III,48) erhalten :

$$(C,V,19) \quad \hat{Q}_{2,i} = e^{**} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_i^2.$$

Unter Verwendung des Ausdrucks (C,V,1) für die Nilssonfunktionen gilt :

$$\begin{aligned} (C,V,20) \quad & \langle \Psi_{\bar{\nu},\bar{K}+i} | \hat{Q}_{2,i} | \Psi_{\bar{\nu},\bar{K}} \rangle = \\ & = \sum_{\ell,\ell',\tau} N_{\ell',\tau}^{\bar{\nu},\bar{K}+i} N_{\ell,\tau}^{\bar{\nu},\bar{K}} \langle R_{\eta,\ell'}^N | r^2 | R_{\eta,\ell}^N \rangle \cdot \sqrt{\frac{16\pi}{5}} e^{**} \cdot \\ & \quad \langle Y_{\bar{K}+i-\tau}^{\ell} | Y_{\tau}^2 | Y_{\bar{K}-\tau}^{\ell} \rangle \cdot \langle \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}} | \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}} \rangle. \end{aligned}$$

Wegen

$$(C,V,21) \quad \langle Y_{\bar{K}+i-\tau}^{\ell'} | Y_{\tau}^2 | Y_{\bar{K}-\tau}^{\ell} \rangle = \sqrt{\frac{5 \cdot (2\ell+1)}{4\pi(2\ell'+1)}} C_{0,0,0}^{2,\ell,\ell'} C_{i,\bar{K}-\tau,\bar{K}+i-\tau}^{2,\ell,\ell'}$$

$$(C,V,22) \quad \langle \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}} | \chi_{\tau}^{\frac{1}{2}} \rangle = \delta_{\tau,\tau'}$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned} (C,V,23) \quad & \langle \Psi_{\bar{\nu},\bar{K}+i} | \hat{Q}_{2,i} | \Psi_{\bar{\nu},\bar{K}} \rangle = \\ & = \sum_{\ell,\ell',\tau} N_{\ell',\tau}^{\bar{\nu},\bar{K}+i} N_{\ell,\tau}^{\bar{\nu},\bar{K}} C_{0,0,0}^{2,\ell,\ell'} C_{i,\bar{K}-\tau,\bar{K}+i-\tau}^{2,\ell,\ell'} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell'+1}} \lambda e^{**} \langle R_{\eta,\ell'}^N | r^2 | R_{\eta,\ell}^N \rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist das verbleibende Radialintegral bereits im Nilssonprogramm enthalten. Zum Beweis der in C,XVIII benötigten Relationen betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} (C,V,24) \quad & \langle \Psi_{\bar{\nu},\bar{K}-i} | Q_{2,-i} | \Psi_{\bar{\nu},\bar{K}} \rangle = \\ & = \sum_{\ell,\ell',\tau} N_{\ell',\tau}^{\bar{\nu},\bar{K}-i} N_{\ell,\tau}^{\bar{\nu},\bar{K}} C_{0,0,0}^{2,\ell,\ell'} C_{-i,\bar{K}-\tau,\bar{K}-i-\tau}^{2,\ell,\ell'} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell'+1}} \lambda e^{**} \langle R_{\eta,\ell'}^N | r^2 | R_{\eta,\ell}^N \rangle. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (C,V,2)

$$(C,V,25) \quad N_{\ell',\tau}^{\bar{y},\bar{k}-i} = N_{\ell',\tau}^{\bar{y},\bar{k}+i}, \quad N_{\ell,\tau}^{\bar{y},-\bar{k}} = N_{\ell,\tau}^{\bar{y},\bar{k}}$$

und

$$(C,V,26) \quad C_{-i,-\bar{k}+\tau,-\bar{k}-i+\tau}^{2,\ell,\ell'} = C_{i,\bar{k}-\tau,\bar{k}+i-\tau}^{2,\ell,\ell'}$$

ergibt sich :

$$(C,V,27) \quad \begin{aligned} & \langle \Psi_{\bar{y},-\bar{k}-i} | \hat{Q}_{2,-i} | \Psi_{\bar{y},-\bar{k}} \rangle = \\ & = \sum_{\ell,\ell',\tau} N_{\ell',\tau}^{\bar{y},\bar{k}+i} N_{\ell,\tau}^{\bar{y},\bar{k}} C_{0,0,0}^{2,\ell,\ell'} C_{i,\bar{k}-\tau,\bar{k}+i-\tau}^{2,\ell,\ell'} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{2\ell+1}} 2e^{**} \langle R_{n',\ell'}^N | \tau^2 | R_{n,\ell}^N \rangle. \end{aligned}$$

Vergleich mit (C,V,23) ergibt :

$$(C,V,28) \quad \langle \Psi_{\bar{y},-\bar{k}-i} | \hat{Q}_{2,-i} | \Psi_{\bar{y},-\bar{k}} \rangle = \langle \Psi_{\bar{y},\bar{k}+i} | \hat{Q}_{2,i} | \Psi_{\bar{y},\bar{k}} \rangle.$$

Damit ist die eine benötigte Relation bewiesen. Wegen

(C,V,23) gilt :

$$(C,V,29) \quad \begin{aligned} & \langle \Psi_{\bar{y},\bar{k}} | \hat{Q}_{2,-i} | \Psi_{\bar{y},\bar{k}+i} \rangle = \\ & = \sum_{\ell,\ell',\tau} N_{\ell,\tau}^{\bar{y},\bar{k}} N_{\ell',\tau}^{\bar{y},\bar{k}+i} C_{0,0,0}^{2,\ell',\ell} C_{-i,\bar{k}+i,\bar{k}}^{2,\ell',\ell} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{2\ell+1}} 2e^{**} \langle R_{n,\ell}^N | \tau^2 | R_{n',\ell'}^N \rangle. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$(C,V,30) \quad \langle R_{n,\ell}^N | \tau^2 | R_{n',\ell'}^N \rangle = \langle R_{n',\ell'}^N | \tau^2 | R_{n,\ell}^N \rangle$$

$$(C,V,31a) \quad C_{0,0,0}^{2,\ell',\ell} = \sqrt{\frac{2\ell'+1}{2\ell+1}} C_{0,0,0}^{2,\ell,\ell'}$$

$$(C,V,31b) \quad C_{-i,\bar{k}+i,\bar{k}}^{2,\ell',\ell} = (-1)^{\ell'-\ell-2-i} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{2\ell+1}} C_{i,\bar{k},\bar{k}+i}^{2,\ell,\ell'}$$

erhalten wir dann :

$$\langle \Psi_{\vec{r}, \vec{k}} | \hat{Q}_{2, -i} | \Psi_{\vec{r}, \vec{k}+i} \rangle =$$

(C, V, 32)

$$\sum_{\ell, \ell', \tau} N_{\ell, \tau}^{\vec{r}, \vec{k}} N_{\ell', \tau}^{\vec{r}, \vec{k}+i} C_{0,0,0}^{2, \ell, \ell'} C_{i, \vec{k}, \vec{k}+i}^{2, \ell, \ell'} (-1)^i \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell'+1}} 2e^{i\pi} \langle R_{\vec{n}, \ell}^N | \tau^2 | R_{\vec{n}, \ell'}^N \rangle.$$

Vergleich mit (C, V, 23) liefert dann die in C, XVIII benötigte Relation

$$(C, V, 33) \quad \langle \Psi_{\vec{r}, \vec{k}} | \hat{Q}_{2, -i} | \Psi_{\vec{r}, \vec{k}+i} \rangle = (-1)^i \langle \Psi_{\vec{r}, \vec{k}+i} | \hat{Q}_{2, i} | \Psi_{\vec{r}, \vec{k}} \rangle.$$

VI. Matrizelemente von Außenteilchenwellenfunktionen für u-u-Kerne

Als Außenteilchenwellenfunktionen haben wir in diesem Fall :

$$(C, VI, 1a) \quad \Psi_{\bar{r}, K}^P = \Psi_{\bar{r}_P, \Omega_P}^P \Psi_{\bar{r}_N, \Omega_N}^N, \quad K = \Omega_P + \Omega_N \neq 0$$

$$(C, VI, 1b) \quad \Psi_{\bar{r}, 0}^3 = \Psi_{\bar{r}_P, \Omega_P}^P \Psi_{\bar{r}_N, \Omega_N}^N + (-1)^{3 + \sum (N_i - \frac{1}{2})} \Psi_{\bar{r}_P, -\Omega_P}^P \Psi_{\bar{r}_N, -\Omega_N}^N, \quad \Omega_P + \Omega_N = 0.$$

Dabei sind im zweiten Fall mit $\Omega_P > 0$ bereits alle linear unabhängigen Wellenfunktionen erfaßt. Zu bilden sind Matrizelemente mit den Schrauboperatoren :

$$(C, VI, 2) \quad \hat{j}_{\pm 1} = \hat{j}_{P \pm 1} + \hat{j}_{N \pm 1}.$$

Für $\bar{K} \neq 0, 1$ bei $j_{\pm 1}$ und für $\bar{K} = 1$ bei j_{+1} gilt dann :

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{\bar{r}, \bar{K} \pm 1} | \hat{j}_{\pm 1} | \Psi_{\bar{r}, \bar{K}} \rangle = \\ (C, VI, 3) \quad & = \langle \Psi_{\bar{r}_P, \bar{\Omega}_P \pm 1}^P | \hat{j}_{P \pm 1} | \Psi_{\bar{r}_P, \bar{\Omega}_P}^P \rangle \langle \Psi_{\bar{r}_N, \Omega_N}^N | \Psi_{\bar{r}_N, \Omega_N}^N \rangle + \\ & + \langle \Psi_{\bar{r}_P, \bar{\Omega}_P}^P | \Psi_{\bar{r}_P, \bar{\Omega}_P}^P \rangle \langle \Psi_{\bar{r}_N, \bar{\Omega}_N \pm 1}^N | \hat{j}_{N \pm 1} | \Psi_{\bar{r}_N, \bar{\Omega}_N}^N \rangle. \end{aligned}$$

Wegen der Orthonormalität der Protonen- und Neutronenwellenfunktionen gilt :

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{\bar{r}, \bar{K} \pm 1} | \hat{j}_{\pm 1} | \Psi_{\bar{r}, \bar{K}} \rangle = \\ (C, VI, 4) \quad & = \langle \Psi_{\bar{r}_P, \bar{\Omega}_P \pm 1}^P | \hat{j}_{P \pm 1} | \Psi_{\bar{r}_P, \bar{\Omega}_P}^P \rangle \delta_{\bar{r}_N, \bar{\Omega}_N} \delta_{\bar{\Omega}_N, \bar{\Omega}_N} + \langle \Psi_{\bar{r}_N, \bar{\Omega}_N \pm 1}^N | \hat{j}_{N \pm 1} | \Psi_{\bar{r}_N, \bar{\Omega}_N}^N \rangle \delta_{\bar{r}_P, \bar{\Omega}_P} \delta_{\bar{\Omega}_P, \bar{\Omega}_P}. \end{aligned}$$

Dann folgt für $\bar{K} \neq 0, 1$ bei $j_{\pm 1}$ und für $\bar{K} = 1$ bei j_{+1} :

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_{\vec{r}, -\vec{k} \pm 1} | \dot{J}_{\pm 1} | \Psi_{\vec{r}, -\vec{k}} \rangle = \\
 (C, VI, 5) \quad &= \langle \Psi_{\vec{r}_p, -\vec{q}_p \pm 1} | \dot{J}_{p \pm 1} | \Psi_{\vec{r}_p, -\vec{q}_p} \rangle \cdot \delta_{\vec{r}_N, \vec{r}_N} \delta_{-\vec{q}_N, -\vec{q}_N} + \\
 &+ \langle \Psi_{\vec{r}_N, -\vec{q}_N \pm 1} | \dot{J}_{N \pm 1} | \Psi_{\vec{r}_N, -\vec{q}_N} \rangle \cdot \delta_{\vec{r}_p, \vec{r}_p} \delta_{-\vec{q}_p, -\vec{q}_p}.
 \end{aligned}$$

Wegen der in C,V bewiesenen Beziehungen über Matrixelemente von Einteilchenwellenfunktionen

$$(C, VI, 6a) \quad \langle \Psi_{\vec{r}_p, -\vec{q}_p \pm 1} | \dot{J}_{p \pm 1} | \Psi_{\vec{r}_p, -\vec{q}_p} \rangle = - \langle \Psi_{\vec{r}_p, \vec{q}_p \mp 1} | \dot{J}_{\mp 1} | \Psi_{\vec{r}_p, \vec{q}_p} \rangle$$

$$(C, VI, 6b) \quad \langle \Psi_{\vec{r}_N, -\vec{q}_N \pm 1} | \dot{J}_{N \pm 1} | \Psi_{\vec{r}_N, -\vec{q}_N} \rangle = - \langle \Psi_{\vec{r}_N, \vec{q}_N \mp 1} | \dot{J}_{N \mp 1} | \Psi_{\vec{r}_N, \vec{q}_N} \rangle$$

gilt dann :

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_{\vec{r}, -\vec{k} \pm 1} | \dot{J}_{\pm 1} | \Psi_{\vec{r}, -\vec{k}} \rangle = \\
 (C, VI, 7) \quad &= - \langle \Psi_{\vec{r}_p, \vec{q}_p \mp 1} | \dot{J}_{p \mp 1} | \Psi_{\vec{r}_p, \vec{q}_p} \rangle \delta_{\vec{r}_N, \vec{r}_N} \delta_{\vec{q}_N, \vec{q}_N} - \langle \Psi_{\vec{r}_N, \vec{q}_N \mp 1} | \dot{J}_{N \mp 1} | \Psi_{\vec{r}_N, \vec{q}_N} \rangle \delta_{\vec{r}_p, \vec{r}_p} \delta_{\vec{q}_p, \vec{q}_p}.
 \end{aligned}$$

Vergleich mit (C, VI, 4) liefert dann sofort :

$$(C, VI, 8) \quad \langle \Psi_{\vec{r}, -\vec{k} \pm 1} | \dot{J}_{\pm 1} | \Psi_{\vec{r}, -\vec{k}} \rangle = - \langle \Psi_{\vec{r}, \vec{k} \mp 1} | \dot{J}_{\mp 1} | \Psi_{\vec{r}, \vec{k}} \rangle.$$

Für $\vec{k} = 0$ erhält man zunächst :

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_{\vec{r}, 1} | \dot{J}_{+1} | \Psi_{\vec{r}, 0} \rangle = \\
 (C, VI, 9) \quad &= \langle \Psi_{\vec{r}_p, \vec{q}_p + 1} | \dot{J}_{p+1} | \Psi_{\vec{r}_p, \vec{q}_p} \rangle \delta_{\vec{r}_N, \vec{r}_N} \delta_{\vec{q}_N, \vec{q}_N} + \langle \Psi_{\vec{r}_N, \vec{q}_N + 1} | \dot{J}_{N+1} | \Psi_{\vec{r}_N, \vec{q}_N} \rangle \delta_{\vec{r}_p, \vec{r}_p} \delta_{\vec{q}_p, \vec{q}_p} + \\
 &+ (-1)^{\vec{r} + \sum \vec{N}_i - \frac{1}{2}} \{ \langle \Psi_{\vec{r}_p, -\vec{q}_p + 1} | \dot{J}_{p+1} | \Psi_{\vec{r}_p, -\vec{q}_p} \rangle \delta_{\vec{r}_N, \vec{r}_N} \delta_{-\vec{q}_N, -\vec{q}_N} + \\
 &+ \langle \Psi_{\vec{r}_N, -\vec{q}_N + 1} | \dot{J}_{N+1} | \Psi_{\vec{r}_N, -\vec{q}_N} \rangle \delta_{\vec{r}_p, \vec{r}_p} \delta_{-\vec{q}_p, -\vec{q}_p} \}.
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\bar{r}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{r},0}^{\bar{z}} \rangle &= \\
 (C, VI, 10) \quad &= \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}-1}}^P | j_{\bar{r}-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle \delta_{\bar{r}_N, \bar{r}_N} \delta_{-\bar{a}_N, \bar{a}_N} + \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N-1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle \delta_{\bar{r}_P, \bar{r}_P} \delta_{\bar{a}_P, \bar{a}_P} + \\
 &+ (-1)^{\bar{z} + \sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \{ \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}-1}}^P | j_{\bar{r}-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle \delta_{\bar{r}_N, \bar{r}_N} \delta_{-\bar{a}_N, -\bar{a}_N} + \\
 &+ \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N-1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle \delta_{\bar{r}_P, \bar{r}_P} \delta_{-\bar{a}_P, -\bar{a}_P} \}.
 \end{aligned}$$

Die in C,V bewiesenen Beziehungen über Matrixelemente von Einteilchenwellenfunktionen

$$(C, VI, 11a) \quad \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}-1}}^P | j_{\bar{r}-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle = - \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}+1}}^P | j_{\bar{r}+1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle$$

$$(C, VI, 11b) \quad \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N-1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle = - \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N+1}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle$$

$$(C, VI, 11c) \quad \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}-1}}^P | j_{\bar{r}-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle = - \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}+1}}^P | j_{\bar{r}+1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle$$

$$(C, VI, 11d) \quad \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N-1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle = - \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N+1}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle$$

werden in (C,VI,10) eingesetzt. Dann erhält man durch Vergleich mit (C,VI,9) sofort :

$$(C, VI, 12) \quad \langle \psi_{\bar{r}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{r},0}^{\bar{z}} \rangle = -(-1)^{\bar{z} + \sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \langle \psi_{\bar{r},1} | j_{+1} | \psi_{\bar{r},0}^{\bar{z}} \rangle.$$

Für $\bar{K} = 1$ gilt dann :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\bar{r},0}^{\bar{z}} | j_{-1} | \psi_{\bar{r},1} \rangle &= \\
 (C, VI, 13) \quad &= \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}-1}}^P | j_{\bar{r}-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle \delta_{\bar{r}_N, \bar{r}_N} \delta_{\bar{a}_N, \bar{a}_N} + \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N-1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle \delta_{\bar{r}_P, \bar{r}_P} \delta_{\bar{a}_P, \bar{a}_P} + \\
 &+ (-1)^{\bar{z} + \sum_i (N_i - \frac{1}{2})} \{ \langle \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}-1}}^P | j_{\bar{r}-1} | \psi_{\bar{r}, \bar{a}_{\bar{r}}}^P \rangle \delta_{\bar{r}_N, \bar{r}_N} \delta_{-\bar{a}_N, \bar{a}_N} + \\
 &+ \langle \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N-1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{r}_N, \bar{a}_N}^N \rangle \delta_{\bar{r}_P, \bar{r}_P} \delta_{-\bar{a}_P, \bar{a}_P} \}.
 \end{aligned}$$

Dann läßt sich analog wie in Fall $\bar{K} = 0$ zeigen :

$$(C, VI, 14) \quad \langle \psi_{\nu,0}^3 | \dot{J}_{+1} | \psi_{\nu,-1} \rangle = -(-1)^{3+\sum(N_i-\frac{1}{2})} \langle \psi_{\nu,0}^3 | \dot{J}_{-1} | \psi_{\nu,1} \rangle.$$

Mit den Formeln (C,VI,4), (C,VI,12) und (C,VI,14) sind die in C,II benötigten Beziehungen über Matrixelemente unserer Wellenfunktionen mit Schrauboperatoren bewiesen. Die benutzten Produktwellenfunktionen sind die nullte Näherung für die exakten Wellenfunktionen von H_I . Die exakten Wellenfunktionen selbst können, da H_I mit $\dot{J}_3$ vertauscht, nur als Linearkombinationen von Produktwellenfunktionen, die zu gleichem K gehören, gebildet werden. Da obige Beziehungen nur auf den Eigenschaften der Wellenfunktionen bezüglich K beruhen, reagiert jeder Summand der Linearkombination in gleicher Weise, so daß dann auch die exakten Wellenfunktionen von H_I die Beziehungen (C,VI,4), (C,VI,12) und (C,VI,14) erfüllen.

Als nächstes sollen nun die Matricelemente des Operators C_{PN} berechnet werden. Aus A,IV entnehmen wir :

$$(C, VI, 15) \quad C_{PN} = -\frac{1}{\Theta_0} (\dot{J}_{P+1} \dot{J}_{N-1} + \dot{J}_{P-1} \dot{J}_{N+1}).$$

Wegen der Orthogonalität der Funktionen ψ_{ν_P, Ω_P}^P und ψ_{ν_N, Ω_N}^N liefert C_{PN} nur für $\psi_{\nu,0}^{\pm}$ ein Diagonalelement, wobei zudem $|\Omega_P| = |\Omega_N| = \frac{1}{2}$ gelten muß. Wegen :

$$(C, VI, 16) \quad \psi_{\nu,0}^{\pm} = \{ \psi_{\nu_P, \frac{1}{2}}^P \psi_{\nu_N, -\frac{1}{2}}^N \pm (-1)^{N_P+N_N-1} \psi_{\nu_P, -\frac{1}{2}}^P \psi_{\nu_N, \frac{1}{2}}^N \}$$

erhalten wir dann :

$$(C, VI, 17) \quad \begin{aligned} &\langle \psi_{\nu,0}^{\pm} | C_{PN} | \psi_{\nu,0}^{\pm} \rangle = \\ &\pm (-1)^{N_P+N_N-1} \{ \langle \psi_{\nu_P, \frac{1}{2}}^P \psi_{\nu_N, -\frac{1}{2}}^N | C_{PN} | \psi_{\nu_P, -\frac{1}{2}}^P \psi_{\nu_N, \frac{1}{2}}^N \rangle + \langle \psi_{\nu_P, -\frac{1}{2}}^P \psi_{\nu_N, \frac{1}{2}}^N | C_{PN} | \psi_{\nu_P, \frac{1}{2}}^P \psi_{\nu_N, -\frac{1}{2}}^N \rangle \}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{p, \frac{1}{2}}^P \Psi_{N, -\frac{1}{2}}^N | C_{PN} | \Psi_{p, -\frac{1}{2}}^P \Psi_{N, \frac{1}{2}}^N \rangle = \\ (C, VI, 18) \quad & - \frac{1}{\Theta_0} \langle \Psi_{p, \frac{1}{2}}^P | j_{p+1} | \Psi_{p, -\frac{1}{2}}^P \rangle \cdot \langle \Psi_{N, -\frac{1}{2}}^N | j_{N-1} | \Psi_{N, \frac{1}{2}}^N \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{p, -\frac{1}{2}}^P \Psi_{N, \frac{1}{2}}^N | C_{PN} | \Psi_{p, \frac{1}{2}}^P \Psi_{N, -\frac{1}{2}}^N \rangle = \\ (C, VI, 19) \quad & - \frac{1}{\Theta_0} \langle \Psi_{p, -\frac{1}{2}}^P | j_{p-1} | \Psi_{p, \frac{1}{2}}^P \rangle \langle \Psi_{N, \frac{1}{2}}^N | j_{N+1} | \Psi_{N, -\frac{1}{2}}^N \rangle \end{aligned}$$

erhalten wir dann unter Benützung der Beziehungen für Einteilchenmatrixelemente :

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{p, 0}^\pm | C_{PN} | \Psi_{p, 0}^\pm \rangle = \\ (C, VI, 20) \quad & \mp (-1)^{N_p + N_N} \frac{2}{\Theta_0} \langle \Psi_{p, -\frac{1}{2}}^P | j_{p-1} | \Psi_{p, \frac{1}{2}}^P \rangle \langle \Psi_{N, -\frac{1}{2}}^N | j_{N-1} | \Psi_{N, \frac{1}{2}}^N \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Definitionsgleichung für den "decoupling-parameter" (A, II, 29)

$$(C, VI, 21) \quad a(v, \frac{1}{2}) = (-1)^N \langle \Psi_{p, -\frac{1}{2}}^P | j_{p-1} | \Psi_{p, \frac{1}{2}}^P \rangle$$

gilt dann :

$$(C, VI, 22) \quad \langle \Psi_{p, 0}^\pm | C_{PN} | \Psi_{p, 0}^\pm \rangle = \mp \frac{2}{\Theta_0} a_p(v_p, \frac{1}{2}) a_N(v_N, \frac{1}{2}).$$

VII. Vergleich der effektiven Trägheitsmomente
zusammengehöriger K_D - und K_S -Banden

1. $\bar{K} \neq 0, 1$

Für $\Theta_{\text{eff}}(\bar{\nu}, \bar{K})$ hatten wir in diesem Fall (A, II, 21) erhalten :

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{eff}}(\bar{\nu}, \bar{K}) &= \\ (C, VII, 1) \quad &= \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\bar{\nu}} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} | j_{-1} | \Psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}, \bar{K}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} + \frac{|\langle \Psi_{\bar{\nu}, \bar{K}+1} | j_{+1} | \Psi_{\bar{\nu}, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}, \bar{K}+1} - E_{\bar{\nu}, \bar{K}}} \right\} \right)^{-1} \\ &= \Theta_0 (1 - \frac{1}{\Theta_0} S(\bar{\nu}, \bar{K}))^{-1}. \end{aligned}$$

Für $\bar{K} = \bar{K}_S = |\bar{l}_P| + |\bar{l}_N|$, also $\bar{l}_P = |\bar{l}_P|$, $\bar{l}_N = |\bar{l}_N|$ erhalten wir nach (C, VI, 4) für die auftretenden Matrixelemente :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\bar{\nu}, \bar{K}_S \pm 1} | j_{\pm 1} | \Psi_{\bar{\nu}, \bar{K}_S} \rangle &= \\ (C, VII, 2) \quad &= \langle \Psi_{\bar{\nu}, |\bar{l}_P| \pm 1}^P | j_{\pm 1} | \Psi_{\bar{\nu}, |\bar{l}_P|}^P \rangle \delta_{\bar{\nu}_N, \bar{\nu}_N} \delta_{\bar{l}_N, |\bar{l}_N|} + \\ &+ \langle \Psi_{\bar{\nu}_N, |\bar{l}_N| \pm 1}^N | j_{\pm 1} | \Psi_{\bar{\nu}_N, |\bar{l}_N|}^N \rangle \delta_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_P} \delta_{\bar{l}_P, |\bar{l}_P|}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die in $\Theta_{\text{eff}}(\bar{\nu}, \bar{K}_S)$ auftretende Summe $S(\bar{\nu}, \bar{K}_S)$:

$$\begin{aligned} S(\bar{\nu}, \bar{K}_S) &= \\ (C, VII, 3) \quad &= \sum_{\bar{\nu}_P} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\bar{\nu}_P, |\bar{l}_P|-1}^P | j_{-1} | \Psi_{\bar{\nu}_P, |\bar{l}_P|}^P \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S-1} - E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S}} + \frac{|\langle \Psi_{\bar{\nu}_P, |\bar{l}_P|+1}^P | j_{+1} | \Psi_{\bar{\nu}_P, |\bar{l}_P|}^P \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S+1} - E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S}} \right\} \\ &+ \sum_{\bar{\nu}_N} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\bar{\nu}_N, |\bar{l}_N|-1}^N | j_{-1} | \Psi_{\bar{\nu}_N, |\bar{l}_N|}^N \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S-1} - E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S}} + \frac{|\langle \Psi_{\bar{\nu}_N, |\bar{l}_N|+1}^N | j_{+1} | \Psi_{\bar{\nu}_N, |\bar{l}_N|}^N \rangle|^2}{E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S+1} - E_{\bar{\nu}_P, \bar{\nu}_N, \bar{K}_S}} \right\} \\ &= S(\bar{\nu}_P, |\bar{l}_P|) + S(\bar{\nu}_N, |\bar{l}_N|). \end{aligned}$$

Für $\bar{K} = \bar{K}_D = |\bar{l}_P| - |\bar{l}_N|$ (wenn $|\bar{l}_P| > |\bar{l}_N|$), also $\bar{l}_P = |\bar{l}_P|$, $-\bar{l}_N = |\bar{l}_N|$ erhalten wir zunächst nach (C, VI, 4) für die auftretenden Matrixelemente :

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\kappa}_D \pm 1} | j \pm 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\kappa}_D} \rangle = \\
 (C, VII, 4) \quad & = \langle \Psi_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r| \pm 1} | j_r \pm 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r|} \rangle \delta_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N} \delta_{|\tilde{\kappa}_N| - |\tilde{\kappa}_r|} + \\
 & + \langle \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N| \pm 1} | j_N \pm 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|} \rangle \delta_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_r} \delta_{|\tilde{\kappa}_r|, |\tilde{\kappa}_r|} .
 \end{aligned}$$

Mit der aus C,V entnommenen Formel über die Symmetrien der Einteilchenmatrixelemente

$$(C, VII, 5) \quad \langle \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N| \pm 1} | j_N \pm 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|} \rangle = - \langle \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N| \mp 1} | j_N \mp 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|} \rangle$$

gehen wir in (C,VII,4) ein und erhalten damit für die in

$\odot_{\text{eff}}(\tilde{\nu}, \tilde{\kappa}_D)$ auftretende Summe $S(\tilde{\nu}, \tilde{\kappa}_D)$:

$$\begin{aligned}
 & S(\tilde{\nu}, \tilde{\kappa}_D) = \\
 (C, VII, 6) \quad & = \sum_{\tilde{\nu}_r} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r| - 1} | j_r - 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r|} \rangle|^2}{E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D - 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D}} + \frac{|\langle \Psi_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r| + 1} | j_r + 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r|} \rangle|^2}{E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D + 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D}} \right\} \\
 & + \sum_{\tilde{\nu}_N} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N| - 1} | j_N - 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|} \rangle|^2}{E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D + 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D}} + \frac{|\langle \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N| + 1} | j_N + 1 | \Psi_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|} \rangle|^2}{E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D - 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D}} \right\} \\
 & = S(\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r|) + S(\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|) .
 \end{aligned}$$

Wir stellen fest : Wenn $|\tilde{\kappa}_r|, |\tilde{\kappa}_N| \neq \frac{1}{2}$ ist, dann kann $\Psi_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\kappa}_S}$ nicht mit $\Psi_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\kappa}_D}$ koppeln. Falls wir in diesem Fall die durch H_{I1} bewirkte Energiedifferenz zwischen $E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\kappa}_S}$ und $E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\kappa}_D}$ vernachlässigen, dann ergibt sich :

$$(C, VII, 7a) \quad E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S - 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S} = E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D - 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D} = E_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r| - 1} - E_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r|}$$

$$(C, VII, 7b) \quad E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S + 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S} = E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D + 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D} = E_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r| + 1} - E_{\tilde{\nu}_r, |\tilde{\kappa}_r|}$$

$$(C, VII, 7c) \quad E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S - 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S} = E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D + 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D} = E_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N| - 1} - E_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|}$$

$$(C, VII, 7d) \quad E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S + 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_S} = E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D - 1} - E_{\tilde{\nu}_r, \tilde{\nu}_N, \tilde{\kappa}_D} = E_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N| + 1} - E_{\tilde{\nu}_N, |\tilde{\kappa}_N|} .$$

Damit erhalten wir :

$$(C, VII, 8) \quad S(\tilde{r}, \tilde{k}_D) = S(\tilde{r}, \tilde{k}_S) = S(\tilde{r}_r, |\tilde{\mathbf{r}}_r|) + S(\tilde{r}_N, |\tilde{\mathbf{r}}_N|).$$

Vergleich mit (A, II, 21) liefert :

$$(C, VII, 9a) \quad \Theta_{\text{eff}, u_3}(\tilde{r}_r, |\tilde{\mathbf{r}}_r|) = \Theta_0 (1 - \frac{1}{\Theta_0} S(\tilde{r}_r, |\tilde{\mathbf{r}}_r|))^{-1}$$

$$(C, VII, 9b) \quad \Theta_{\text{eff}, u_4}(\tilde{r}_N, |\tilde{\mathbf{r}}_N|) = \Theta_0 (1 - \frac{1}{\Theta_0} S(\tilde{r}_N, |\tilde{\mathbf{r}}_N|))^{-1}.$$

Mit (C, VII, 1), (C, VII, 8), (C, VII, 9a) und (C, VII, 9b) gilt dann :

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{eff}, u_4}(\tilde{r}, \tilde{k}_S) &= \Theta_{\text{eff}, u_4}(\tilde{r}, \tilde{k}_D) = \\ (C, VII, 10) \quad &= (\Theta_{\text{eff}, u_3}(\tilde{r}_r, |\tilde{\mathbf{r}}_r|)^{-1} + \Theta_{\text{eff}, u_4}(\tilde{r}_N, |\tilde{\mathbf{r}}_N|)^{-1} - \Theta_0^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch für $\tilde{k} = \tilde{k}_D = -|\tilde{\mathbf{r}}_r| + |\tilde{\mathbf{r}}_N|$ ($|\tilde{\mathbf{r}}_r| < |\tilde{\mathbf{r}}_N|$).

Wenn $|\tilde{\mathbf{r}}_r| = \frac{1}{2}$ oder $|\tilde{\mathbf{r}}_N| = \frac{1}{2}$ gilt, dann koppelt $\Psi_{\tilde{r}, \tilde{k}_S}$ mit $\Psi_{\tilde{r}, \tilde{k}_D}$ und umgekehrt. Der bei diesem Matrixelement auftretende Energienenner würde bei Vernachlässigung von H_{I1} verschwinden, und die Störungsrechnung würde zusammenbrechen. Bei Berücksichtigung von H_{I1} hat er für zusammengehörige $\tilde{k}_S$ - und $\tilde{k}_D$ -Banden verschiedene Vorzeichen, so daß deshalb $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{r}, \tilde{k}_S)$ stets von $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{r}, \tilde{k}_D)$ verschieden ist.

$$2. \quad \underline{\tilde{k}_D = 0}$$

Für $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{r}, 0)$ hatten wir in diesem Fall erhalten :

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{eff}}(\tilde{r}, 0) &= \Theta_0 (1 - \frac{1}{\Theta_0} S(\tilde{r}, 0))^{-1} = \\ (C, VII, 11) \quad &= \Theta_0 (1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\nu} \frac{|\langle \Psi_{\tilde{r}, 1} | \hat{z}_{+1} | \Psi_{\tilde{r}, 0}^{\pm} \rangle|^2}{E_{\nu, 1} - E_{\tilde{r}, 0}})^{-1}. \end{aligned}$$

Mit $\tilde{k} = \tilde{k}_D = |\tilde{\mathbf{r}}_r| - |\tilde{\mathbf{r}}_N|$, also $\tilde{\mathbf{r}}_r = |\mathbf{r}_r|, \tilde{\mathbf{r}}_N = -|\mathbf{r}_r|$ gehen wir in (C, VI, 9) ein und erhalten :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{p,1} | j_{p+1} | \psi_{\bar{p},0}^{\bar{z}} \rangle &= \\
 &= \langle \psi_{p,1}^p | j_{p+1} | \psi_{\bar{p},1}^p \rangle \delta_{\bar{p}_N, \bar{p}_N} \delta_{\bar{p}_N, 1} \delta_{\bar{p}_N, 1} + \langle \psi_{\bar{p},1}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{p},1}^N \rangle \delta_{\bar{p}_N, \bar{p}_N} \delta_{\bar{p}_N, 1} \delta_{\bar{p}_N, 1} + \\
 (C, VII, 12) \quad &+ (-1)^{3+\sum_c (N_c - \frac{1}{2})} \{ \langle \psi_{p,1}^p | j_{p+1} | \psi_{\bar{p},1}^p \rangle \delta_{\bar{p}_N, \bar{p}_N} \delta_{\bar{p}_N, 1} \delta_{\bar{p}_N, 1} + \\
 &+ \langle \psi_{\bar{p},1}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{p},1}^N \rangle \delta_{\bar{p}_N, \bar{p}_N} \delta_{\bar{p}_N, 1} \delta_{\bar{p}_N, 1} \} .
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der in C,V bewiesenen Beziehungen über
 Matricelemente von Einteilchenwellenfunktionen ergibt
 sich dann mit (C,VII,11) :

$$\begin{aligned}
 S(\bar{p},0) &= S(\bar{p},1\bar{p}_N) + S(\bar{p}_N,1\bar{p}_N) = \\
 (C, VII, 13) \quad &= \sum_{\bar{p}_p} \frac{|\langle \psi_{p,1}^p | j_{p+1} | \psi_{\bar{p},1}^p \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 0}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{p},1}^p | j_{p-1} | \psi_{\bar{p},1}^p \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 1'} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 0}} \\
 &+ \sum_{\bar{p}_N} \frac{|\langle \psi_{\bar{p},1}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{p},1}^N \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 0}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{p},1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{p},1}^N \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 1'} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 0}} .
 \end{aligned}$$

Für die zu $\bar{K}_D = 0$ gehörende $\bar{K}_S$ -Bande hatten wir für
 $\bar{K}_S \neq 1$ erhalten : ((C,VII,3) mit $|\bar{p}_N| = |\bar{p}_N|$)

$$\begin{aligned}
 S(\bar{p}, \bar{K}_S) &= S(\bar{p}, |\bar{p}_N|) + S(\bar{p}_N, |\bar{p}_N|) = \\
 (C, VII, 14) \quad &= \sum_{\bar{p}_p} \frac{|\langle \psi_{p,1}^p | j_{p+1} | \psi_{\bar{p},1}^p \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S+1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{p},1}^p | j_{p-1} | \psi_{\bar{p},1}^p \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S-1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S}} \\
 &+ \sum_{\bar{p}_N} \frac{|\langle \psi_{\bar{p},1}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{p},1}^N \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S+1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{p},1}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{p},1}^N \rangle|^2}{E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S-1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S}} .
 \end{aligned}$$

Wir stellen fest: Wenn $|\bar{p}_N| \neq \frac{1}{2}$, $|\bar{p}_N| \neq \frac{1}{2}$ (dies ist durch die
 Einschränkung $\bar{K}_S \neq 1$ bereits erfüllt), dann kann $\psi_{\bar{p},0}^{\bar{z}}$ nicht
 mit $\psi_{\bar{p},K_S}$ koppeln. Falls wir in diesem Fall die Energie-
 differenz zwischen $E_{\bar{p}, \bar{p}_N, \bar{K}_D}$ und $E_{\bar{p}, \bar{p}_N, \bar{K}_S}$ sowie die J-Abhängig-
 keit von $E_{\bar{p}, \bar{p}_N, 0}$ vernachlässigen, erhalten wir :

$$(C, VII, 15a) \quad E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S+1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S} = E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 0} = E_{\bar{p}_p, |\bar{p}_N|+1} - E_{\bar{p}_p, |\bar{p}_N|}$$

$$(C, VII, 15b) \quad E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S-1} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, \bar{K}_S} = E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 1'} - E_{\bar{p}_p, \bar{p}_N, 0} = E_{\bar{p}_p, |\bar{p}_N|-1} - E_{\bar{p}_p, |\bar{p}_N|}$$

$$(C, VII, 15c) \quad E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, \tilde{K}_S+1} - E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, \tilde{K}_S} = E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, 1} - E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, 0} = E_{\tilde{y}_N, |\tilde{\Omega}_p|+1} - E_{\tilde{y}_N, |\tilde{\Omega}_p|}$$

$$(C, VII, 15d) \quad E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, \tilde{K}_S-1} - E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, \tilde{K}_S} = E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, 1'} - E_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_N, 0} = E_{\tilde{y}_N, |\tilde{\Omega}_p|-1} - E_{\tilde{y}_N, |\tilde{\Omega}_p|}.$$

Damit gilt dann :

$$(C, VII, 16) \quad S(\tilde{y}, 0) = S(\tilde{y}, \tilde{K}_S) = S(\tilde{y}_p, |\tilde{\Omega}_p|) + S(\tilde{y}_N, |\tilde{\Omega}_N|)$$

und wir erhalten mit (C, VII, 9a), (C, VII, 9b) auch

$$(C, VII, 17) \quad \Theta_{\text{eff}, uu}(\tilde{y}, \tilde{K}_S^0) = (\Theta_{\text{eff}, ug}(\tilde{y}_p, |\tilde{\Omega}_p|)^{-1} + \Theta_{\text{eff}, gu}(\tilde{y}_N, |\tilde{\Omega}_N|)^{-1} - \Theta_0^{-1})^{-1}.$$

$$3. \quad \underline{\bar{K} = 1}$$

Für $\Theta_{\text{eff}}(\tilde{y}, 1)$ hatten wir in diesem Fall (A, II, 36b) erhalten :

$$\Theta_{\text{eff}}(\tilde{y}, 1) =$$

$$(C, VII, 18) \quad = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\tilde{y}} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\tilde{y}, 0}^{\tilde{y}} | \tilde{y}-1 | \Psi_{\tilde{y}, 1} \rangle|^2}{E_{\tilde{y}, 0} - E_{\tilde{y}, 1}} + \frac{|\langle \Psi_{\tilde{y}, 2} | \tilde{y}+1 | \Psi_{\tilde{y}, 1} \rangle|^2}{E_{\tilde{y}, 2} - E_{\tilde{y}, 1}} \right\} \right)^{-1} \\ = \Theta_0 \left(1 - \frac{1}{\Theta_0} S(\tilde{y}, 1) \right)^{-1}.$$

Für $\bar{K} = \bar{K}_0 = |\tilde{\Omega}_p| - |\tilde{\Omega}_N|$ (wenn $|\tilde{\Omega}_p| > |\tilde{\Omega}_N|$), also $\tilde{\Omega}_p = |\tilde{\Omega}_p|$, $\tilde{\Omega}_N = -|\tilde{\Omega}_N|$ erhalten wir aus (C, VI, 13) und (C, VI, 4) :

$$(C, VII, 19) \quad \langle \Psi_{\tilde{y}, 0}^{\tilde{y}} | \tilde{y}-1 | \Psi_{\tilde{y}, 1} \rangle = \langle \Psi_{\tilde{y}_p, |\tilde{\Omega}_p|-1}^p | \tilde{y}_p-1 | \Psi_{\tilde{y}_p, |\tilde{\Omega}_p|}^p \rangle \delta_{\tilde{y}_N, \tilde{y}_N} \delta_{\tilde{\Omega}_N, -|\tilde{\Omega}_N|} + \\ + \langle \Psi_{\tilde{y}_N, |\tilde{\Omega}_N|-1}^N | \tilde{y}_N-1 | \Psi_{\tilde{y}_N, -|\tilde{\Omega}_N|}^N \rangle \delta_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_p} \delta_{\tilde{\Omega}_p, |\tilde{\Omega}_p|}$$

$$(C, VII, 20) \quad \langle \Psi_{\tilde{y}, 2} | \tilde{y}+1 | \Psi_{\tilde{y}, 1} \rangle = \langle \Psi_{\tilde{y}_p, |\tilde{\Omega}_p|+1}^p | \tilde{y}_p+1 | \Psi_{\tilde{y}_p, |\tilde{\Omega}_p|}^p \rangle \delta_{\tilde{y}_N, \tilde{y}_N} \delta_{\tilde{\Omega}_N, -|\tilde{\Omega}_N|} + \\ + \langle \Psi_{\tilde{y}_N, -|\tilde{\Omega}_N|+1}^N | \tilde{y}_N+1 | \Psi_{\tilde{y}_N, -|\tilde{\Omega}_N|}^N \rangle \delta_{\tilde{y}_p, \tilde{y}_p} \delta_{\tilde{\Omega}_p, |\tilde{\Omega}_p|}.$$

Unter Benützung der in C,V gewonnenen Beziehungen über Matrixelemente von Einteilchenwellenfunktionen erhalten wir dann, wie aus (C,VII,18), (C,VII,19) und (C,VII,20) explizit für $\tilde{K}_D = |\tilde{l}_p| - |\tilde{l}_N|$, ($|\tilde{l}_p| > |\tilde{l}_N|$) folgt und wie durch analoge Rechnung auch für $\tilde{K}_D = -|\tilde{l}_p| + |\tilde{l}_N|$, ($|\tilde{l}_p| < |\tilde{l}_N|$) gezeigt werden kann, für die in $\odot_{\text{eff}}(\tilde{v}, 1)$ vorkommende Summe $S(\tilde{v}, 1)$:

$$S(\tilde{v}, 1) = S(\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|) + S(\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|)$$

$$(C, VII, 21) \quad = \sum_{\tilde{v}_p} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|-1}^p | \dot{\tilde{z}}_{p-1} | \Psi_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|}^p \rangle|^2}{E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 0} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1}} + \frac{|\langle \Psi_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|+1}^p | \dot{\tilde{z}}_{p+1} | \Psi_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|}^p \rangle|^2}{E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 2} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1}} \right\} \\ + \sum_{\tilde{v}_N} \left\{ \frac{|\langle \Psi_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|-1}^N | \dot{\tilde{z}}_{N-1} | \Psi_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|}^N \rangle|^2}{E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 2} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1}} + \frac{|\langle \Psi_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|+1}^N | \dot{\tilde{z}}_{N+1} | \Psi_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|}^N \rangle|^2}{E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 0} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1}} \right\}.$$

Wir stellen fest: Wenn $|\tilde{l}_p| \neq \frac{1}{2}$, $|\tilde{l}_N| \neq \frac{1}{2}$, dann koppelt $\Psi_{\tilde{v}, 1}$ nicht mit dem dazugehörigen $\Psi_{\tilde{v}, \tilde{K}_S}$. Falls wir in diesem Fall wieder die Energiedifferenz zwischen $E_{\tilde{v}, \tilde{K}_S}$ und $E_{\tilde{v}, \tilde{K}_D}$ sowie die J-Abhängigkeit von $E_{\tilde{v}, 0}$ vernachlässigen, erhalten wir :

$$(C, VII, 22a) \quad E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S+1} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S} = E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 2} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1} = E_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|+1} - E_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|}$$

$$(C, VII, 22b) \quad E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S-1} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S} = E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 0} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1} = E_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|-1} - E_{\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|}$$

$$(C, VII, 22c) \quad E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S+1} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S} = E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 0} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1} = E_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|+1} - E_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|}$$

$$(C, VII, 22d) \quad E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S-1} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, \tilde{K}_S} = E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 2} - E_{\tilde{v}_p, \tilde{v}_N, 1} = E_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|-1} - E_{\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|}.$$

Damit gilt dann wieder :

$$(C, VII, 23) \quad S(\tilde{v}, 1) = S(\tilde{v}, \tilde{K}_S) = S(\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|) + S(\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|)$$

und wir erhalten auch in diesem Fall mit (C, VII, 9a) und (C, VII, 9b) :

$$(C, VII, 24) \quad \odot_{\text{eff}, uu}(\tilde{v}_{K_S}^1) = (\odot_{\text{eff}, ug}(\tilde{v}_p, |\tilde{l}_p|)^{-1} + \odot_{\text{eff}, gu}(\tilde{v}_N, |\tilde{l}_N|)^{-1} - \odot_0^{-1})^{-1}.$$

Wenn $|\bar{l}_p| = \frac{1}{2}$ oder $|\bar{l}_N| = \frac{1}{2}$ ist, dann koppelt $\psi_{\bar{v},1}$ mit $\psi_{\bar{v},\bar{k}_S}$. Der bei diesem Matrixelement auftretende Energienenner würde wieder bei Vernachlässigung von H_{I1} verschwinden, und die Störungsrechnung würde zusammenbrechen. Bei Mitnahme von H_{I1} hat er für die $\bar{K}_D=1$ - und die zugehörige $\bar{K}_S$ -Bande verschiedene Vorzeichen und bewirkt damit, daß $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v},1)$ und $\Theta_{\text{eff}}(\bar{v},\bar{K}_S)$ verschieden sind.

Für $\bar{K} = \bar{K}_S = |\bar{l}_p| + |\bar{l}_N|$, $|\bar{l}_p| = \frac{1}{2}$, $|\bar{l}_N| = \frac{1}{2}$ erhalten wir aus (C,VI,13) und (C,VI,4) :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\bar{v},0}^3 | j-1 | \psi_{\bar{v},1} \rangle &= \\ (C,VII,25) \quad &= \langle \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}}^p | j_{p-1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}}^p \rangle \delta_{v_N,\bar{v}_N} \delta_{l_N,\frac{1}{2}} + \langle \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N \rangle \delta_{v_p,\bar{v}_p} \delta_{l_p,\frac{1}{2}} \\ \langle \psi_{\bar{v},2} | j+1 | \psi_{\bar{v},1} \rangle &= \\ (C,VII,26) \quad &= \langle \psi_{\bar{v}_p,\frac{3}{2}}^p | j_{p+1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}}^p \rangle \delta_{v_N,\bar{v}_N} \delta_{l_N,\frac{1}{2}} + \langle \psi_{\bar{v}_N,\frac{3}{2}}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N \rangle \delta_{v_p,\bar{v}_p} \delta_{l_p,\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der in C,V bewiesenen Beziehungen über Matrixelemente von Einteilchenwellenfunktionen ergibt sich dann mit (C,VII,19) :

$$\begin{aligned} S(\bar{v},1) &= \\ (C,VII,27) \quad &= \sum_{\bar{v}_p} \left\{ \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_p,\frac{1}{2}}^p | j_{p-1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}}^p \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,0} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_p,\frac{3}{2}}^p | j_{p+1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}}^p \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,2} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1}} \right\} \\ &+ \sum_{\bar{v}_N} \left\{ \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,0} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_N,\frac{3}{2}}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,2} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1}} \right\} \end{aligned}$$

Für die zugehörige $\bar{K}_D=0$ -Bande erhalten wir unter Verwendung von (C,VII,13) :

$$\begin{aligned} S(\bar{v},0) &= \\ (C,VII,28) \quad &= \sum_{\bar{v}_p} \left\{ \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_p,\frac{1}{2}}^p | j_{p-1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}}^p \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1'} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,0}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_p,\frac{3}{2}}^p | j_{p+1} | \psi_{\bar{v},\frac{1}{2}}^p \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,0}} \right\} \\ &+ \sum_{\bar{v}_N} \left\{ \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N | j_{N-1} | \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1'} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,0}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{v}_N,\frac{3}{2}}^N | j_{N+1} | \psi_{\bar{v}_N,\frac{1}{2}}^N \rangle|^2}{E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,1} - E_{\bar{v}_p,\bar{v}_N,0}} \right\} \end{aligned}$$

Wir stellen fest: $\Psi_{\tilde{r},1}$ und $\Psi_{\tilde{r},0}$ koppeln miteinander. H_{I1} liefert dann für die $\bar{K}_D=0$ - und die zugehörige $\bar{K}_S=1$ -Bande wieder ein verschiedenes Trägheitsmoment.

Wir wollen die Ergebnisse dieses Abschnitts kurz zusammenfassen: Für Rotationsbanden eines u-u-Kerns, bei denen weder das Proton noch das Neutron in Niveaus mit $|\bar{M}_P|=1/2$ oder $|\bar{M}_N|=1/2$ sitzen, haben die zusammengehörigen $\bar{K}_S$ - und $\bar{K}_D$ -Banden unter Vernachlässigung der Energiebeiträge von H_{I1} das gleiche effektive Trägheitsmoment $\Theta_{\text{eff},uu}(\tilde{r}, \bar{K}_{D,S})$. Es ist durch die Formel

$$(C, VII, 29) \quad \Theta_{\text{eff},uu}(\tilde{r}, \bar{K}_{D,S}) = (\Theta_{\text{eff},ug}(\tilde{r}, |\bar{M}_P|)^{-1} + \Theta_{\text{eff},gu}(\tilde{r}, |\bar{M}_N|)^{-1} - \Theta_0^{-1})^{-1}$$

mit den effektiven Trägheitsmomenten der entsprechenden Rotationsbanden der zu dem betreffenden u-u-Kern gehörigen u-g- und g-u-Kerne verknüpft.

Falls $|\bar{M}_P|=1/2$ oder $|\bar{M}_N|=1/2$ dann koppeln die zusammengehörigen Niveaus $\Psi_{\tilde{r},\bar{K}_S}$ und $\Psi_{\tilde{r},\bar{K}_D}$ miteinander. H_{I1} darf nicht vernachlässigt werden und liefert in diesem Fall für $\bar{K}_S$ - und $\bar{K}_D$ -Banden verschiedene effektive Trägheitsmomente.

VIII. Berechnung der Diagonalelemente der Gauß- wechselwirkung

1. Herleitung des Matrixelementes ohne explizite Berechnung der Radialintegrale

Mit den Außenteilchenwellenfunktionen sind Matrixelemente mit der folgenden Gaußwechselwirkung mit Ortsaustausch- und Spin-Spin-Term zu bilden.

$$(C, VIII, 1) \quad V_{PN} = V_0 e^{-\beta |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N|^2} \left\{ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\hbar^2} \mathbf{s}_P \cdot \mathbf{s}_N \right\} \{ (1-\gamma) + \gamma \mathbf{P}_m \}.$$

Dabei ist $\mathbf{P}_m$ der Ortsaustauschterm; $\alpha, \gamma_P = \beta^{-1}, \gamma, V_0$ sind Parameter der Wechselwirkung. Wir wollen zunächst mit dem durch

$$(C, VIII, 2) \quad |\gamma_P, \Omega_P, \gamma_N, \Omega_N\rangle = \Psi_{\gamma_P, \Omega_P}^P(P) \Psi_{\gamma_N, \Omega_N}^N(N) = \sum_{\ell_P, \ell_N, \tau_P, \tau_N} N_{\ell_P, \tau_P}^{\gamma_P, \Omega_P} \cdot N_{\ell_N, \tau_N}^{\gamma_N, \Omega_N} \\ R_{\tau_P, \ell_P}^{N_P}(P) R_{\tau_N, \ell_N}^{N_N}(N) Y_{\ell_P, \tau_P}^{\ell_P}(P) Y_{\ell_N, \tau_N}^{\ell_N}(N) \chi_{\tau_P}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\tau_N}^{\frac{1}{2}}(N)$$

(P, N sollen die Koordinaten des Protons bzw. Neutrons im rumpffesten System sein, $\chi_{\tau_P}^{\frac{1}{2}}(P)$ und $\chi_{\tau_N}^{\frac{1}{2}}(N)$ haben die ζ -Achse als Quantisierungsachse.)

gegebenen Baustein der Außenteilchenwellenfunktion Matrixelemente berechnen. Für den gestrichenen Baustein gilt :

$$(C, VIII, 3) \quad |\gamma_P, \Omega_P, \gamma_N, \Omega_N\rangle = \sum_{\ell'_P, \ell'_N, \tau'_P, \tau'_N} N_{\ell'_P, \tau'_P}^{\gamma_P, \Omega_P} \cdot N_{\ell'_N, \tau'_N}^{\gamma_N, \Omega_N} \cdot R_{\tau'_P, \ell'_P}^{N_P}(P) R_{\tau'_N, \ell'_N}^{N_N}(N) \\ Y_{\ell'_P, \tau'_P}^{\ell'_P}(P) Y_{\ell'_N, \tau'_N}^{\ell'_N}(N) \chi_{\tau'_P}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N).$$

Die Wirkung des Ortsaustauschoperators auf den gestrichenen Baustein ergibt :

$$P_m |\psi_p, \Omega_p, \psi_N, \Omega_N\rangle = P_m \psi_{\psi_p, \Omega_p}^p(P) \psi_{\psi_N, \Omega_N}^N(N) =$$

$$(C, VIII, 4) \quad \psi_{\psi_p, \Omega_p}^p(N) \psi_{\psi_N, \Omega_N}^N(P) = \sum_{\ell'_p, \ell'_N, \tau'_p, \tau'_N} N_{\ell'_p, \tau'_p}^{\psi_p, \Omega_p} N_{\ell'_N, \tau'_N}^{\psi_N, \Omega_N} \cdot$$

$$R_{\tau'_p, \ell'_p}^{N_p}(N) R_{\tau'_N, \ell'_N}^{N_N}(P) Y_{\Omega_p - \tau'_p}^{\ell'_p}(N) Y_{\Omega_N - \tau'_N}^{\ell'_N}(P) \chi_{\tau'_p}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N).$$

Die Wirkung des Spin-Spin-Terms auf die Spinwellenfunktionen läßt sich mit

$$(C, VIII, 5) \quad \underline{S}_p \cdot \underline{S}_N = S_{p\gamma} \cdot S_{N\gamma} - S_{p+1} S_{N-1} - S_{p-1} S_{N+1}$$

sofort zu

$$(C, VIII, 6a) \quad S_{p\gamma} \cdot S_{N\gamma} \chi_{\pm \tau'_p}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\pm \tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N) = \hbar^2 \tau'_p \tau'_N \chi_{\pm \tau'_p}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\pm \tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N)$$

$$(C, VIII, 6b) \quad -S_{p+1} S_{N-1} \chi_{\pm \tau'_p}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\pm \tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N) = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{\pm \tau'_p, -\frac{1}{2}} \delta_{\pm \tau'_N, \frac{1}{2}} \chi_{\mp \tau'_p}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\mp \tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N)$$

$$(C, VIII, 6c) \quad -S_{p-1} S_{N+1} \chi_{\pm \tau'_p}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\pm \tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N) = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{\pm \tau'_p, \frac{1}{2}} \delta_{\pm \tau'_N, -\frac{1}{2}} \chi_{\mp \tau'_p}^{\frac{1}{2}}(P) \chi_{\mp \tau'_N}^{\frac{1}{2}}(N)$$

ermitteln. Für das Matrixelement mit dem Operator, der nur Orts- und Spin-Spin-Terme enthält und hier kurz mit

$$V_{0S} = O(\tau) \left\{ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\hbar^2} \underline{S}_p \cdot \underline{S}_N \right\} =$$

$$(C, VIII, 7) \quad = V_0 e^{-\beta(|\underline{r}_p - \underline{r}_N|)^2} \left\{ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\hbar^2} \underline{S}_p \cdot \underline{S}_N \right\}$$

bezeichnet wird, erhalten wir nach ausgeführter Spinintegration :

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi_{P, \Omega_P, \psi_{N, \Omega_N} | V_{0, S} | \psi_{P, \Omega_P, \psi_{N, \Omega_N}} \rangle = \\
 & = \sum_{\substack{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N, \tau_P, \tau_N, \tau'_P, \tau'_N}} N_{\ell_P, \tau_P}^{\psi_{P, \Omega_P}} N_{\ell_N, \tau_N}^{\psi_{N, \Omega_N}} N_{\ell'_P, \tau'_P}^{\psi_{P, \Omega_P}} N_{\ell'_N, \tau'_N}^{\psi_{N, \Omega_N}} \\
 & \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\pi_P, \ell_P}^{* N_P}(\tau_P) R_{\pi_N, \ell_N}^{* N_N}(\tau_N) R_{\pi'_P, \ell'_P}^{N_P}(\tau_P) R_{\pi'_N, \ell'_N}^{N_N}(\tau_N) \cdot \tau_P^2 \cdot \tau_N^2 \cdot \\
 & \int \int Y_{\Omega_P - \tau_P}^{* \ell_P}(P) Y_{\Omega_N - \tau_N}^{* \ell_N}(N) Y_{\Omega'_P - \tau'_P}^{\ell'_P}(P) Y_{\Omega'_N - \tau'_N}^{\ell'_N}(N) \cdot O(\tau) \cdot d\hat{\tau}_P d\hat{\tau}_N d\tau_P d\tau_N \\
 & \cdot [(1-\alpha) \delta_{\tau'_P, \tau_P} \cdot \delta_{\tau'_N, \tau_N} + \alpha \{ \tau'_P \tau'_N \delta_{\tau'_P, \tau_P} \cdot \delta_{\tau'_N, \tau_N} + \frac{1}{2} \delta_{\tau'_P, \tau_P} \delta_{\tau'_N, \tau_N} \cdot \\
 & \cdot (\delta_{\tau'_P, -\frac{1}{2}} \cdot \delta_{\tau'_N, \frac{1}{2}} + \delta_{\tau'_P, \frac{1}{2}} \cdot \delta_{\tau'_N, -\frac{1}{2}}) \}].
 \end{aligned}$$

Für das Matricelement mit dem Operator, der den Orts-
austausch- und den Spin-Spin-Term enthält, und der
hier kurz mit

$$\begin{aligned}
 V_{P, S} &= O(\tau) \{ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\hbar^2} \mathbf{S}_P \cdot \mathbf{S}_N \} P_m = \\
 & (C, VIII, 9) \\
 & = V_0 e^{-\beta(|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N|)} \{ (1-\alpha) + \frac{\alpha}{\hbar^2} \mathbf{S}_P \cdot \mathbf{S}_N \} P_m
 \end{aligned}$$

bezeichnet wird, ergibt sich nach ausgeführter Spin-
integration :

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi_{P, \Omega_P, \psi_{N, \Omega_N} | V_{P, S} | \psi_{P, \Omega_P, \psi_{N, \Omega_N}} \rangle = \\
 & = \sum_{\substack{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N, \tau_P, \tau_N, \tau'_P, \tau'_N}} N_{\ell_P, \tau_P}^{\psi_{P, \Omega_P}} N_{\ell_N, \tau_N}^{\psi_{N, \Omega_N}} N_{\ell'_P, \tau'_P}^{\psi_{P, \Omega_P}} N_{\ell'_N, \tau'_N}^{\psi_{N, \Omega_N}} \cdot \\
 & \int_0^\infty \int_0^\infty R_{\pi_P, \ell_P}^{* N_P}(\tau_P) R_{\pi_N, \ell_N}^{* N_N}(\tau_N) R_{\pi'_P, \ell'_P}^{N_P}(\tau_P) R_{\pi'_N, \ell'_N}^{N_N}(\tau_N) \cdot \tau_P^2 \cdot \tau_N^2 \cdot \\
 & \int \int Y_{\Omega_P - \tau_P}^{* \ell_P}(P) Y_{\Omega_N - \tau_N}^{* \ell_N}(N) Y_{\Omega'_P - \tau'_P}^{\ell'_P}(P) Y_{\Omega'_N - \tau'_N}^{\ell'_N}(N) \cdot O(\tau) d\hat{\tau}_P d\hat{\tau}_N d\tau_P d\tau_N \cdot \\
 & [(1-\alpha) \delta_{\tau'_P, \tau_P} \cdot \delta_{\tau'_N, \tau_N} + \alpha \{ \tau'_P \tau'_N \delta_{\tau'_P, \tau_P} \cdot \delta_{\tau'_N, \tau_N} + \frac{1}{2} \delta_{\tau'_P, \tau_P} \delta_{\tau'_N, \tau_N} \cdot \\
 & (\delta_{\tau'_P, -\frac{1}{2}} \cdot \delta_{\tau'_N, \frac{1}{2}} + \delta_{\tau'_P, \frac{1}{2}} \cdot \delta_{\tau'_N, -\frac{1}{2}}) \}].
 \end{aligned}$$

Zur Vermeidung unnötiger Schreibarbeit führen wir nun die Abkürzung

$$(C, VIII, 11) \quad \begin{aligned} S_{\tau'_p, \tau'_N}^{\tau_p, \tau_N}(\alpha) = & [(1-\alpha) \delta_{\tau'_p, \tau_p} \delta_{\tau'_N, \tau_N} + \alpha \{ \tau'_p \tau'_N \delta_{\tau'_p, \tau_p} \delta_{\tau'_N, \tau_N} + \\ & + \frac{1}{2} \delta_{\tau'_p, -\tau_p} \delta_{\tau'_N, -\tau_N} (\delta_{\tau'_p, -\frac{1}{2}} \delta_{\tau'_N, \frac{1}{2}} + \delta_{\tau'_p, \frac{1}{2}} \delta_{\tau'_N, -\frac{1}{2}}) \}] \end{aligned}$$

ein. Nunmehr wenden wir uns der Integration über die Winkelvariablen zu. Allgemein ist das folgende Integral zu untersuchen:

$$(C, VIII, 12) \quad \begin{aligned} W_{\Lambda_a, \Lambda_b, \Lambda'_a, \Lambda'_b}^{\ell_a, \ell_b, \ell'_a, \ell'_b} = \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi Y_{\Lambda_a}^{*\ell_a}(p) Y_{\Lambda_b}^{*\ell_b}(N) Y_{\Lambda'_a}^{\ell'_a}(p) Y_{\Lambda'_b}^{\ell'_b}(N) O(\tau) \sin \vartheta_p d\vartheta_p \sin \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_p d\varphi_N \end{aligned}$$

Es gilt zunächst:

$$(C, VIII, 13) \quad \begin{aligned} Y_{\Lambda_a}^{*\ell_a}(p) Y_{\Lambda'_a}^{\ell'_a}(p) &= (-1)^{\Lambda_a} Y_{-\Lambda_a}^{\ell_a}(p) Y_{\Lambda'_a}^{\ell'_a}(p) = \\ &= (-1)^{\Lambda_a} \sum_{j_p} \frac{\sqrt{(2\ell_a+1)(2\ell'_a+1)}}{4\pi(2j_p+1)} C_{-\Lambda_a, \Lambda'_a, \Lambda'_a-\Lambda_a}^{\ell_a, \ell'_a, j_p} C_{0, 0, 0}^{\ell_a, \ell'_a, j_p} Y_{\Lambda'_a-\Lambda_a}^{j_p}(p) \end{aligned}$$

$$(C, VIII, 14) \quad \begin{aligned} Y_{\Lambda_b}^{*\ell_b}(N) Y_{\Lambda'_b}^{\ell'_b}(N) &= \\ &= (-1)^{\Lambda_b} \sum_{j_N} \frac{\sqrt{(2\ell_b+1)(2\ell'_b+1)}}{4\pi(2j_N+1)} C_{\Lambda_b, -\Lambda'_b, \Lambda_b-\Lambda'_b}^{\ell_b, \ell'_b, j_N} C_{0, 0, 0}^{\ell_b, \ell'_b, j_N} Y_{\Lambda_b-\Lambda'_b}^{*j_N}(N). \end{aligned}$$

Nunmehr führen wir nur für die Rechnung ein neues $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ - $\bar{Z}$ -Koordinatensystem ein, dessen $\bar{Z}$ -Achse durch das Neutron N geht und dessen $\bar{X}$ -Achse so orientiert ist, daß das Proton immer in der $\bar{X}$ - $\bar{Z}$ -Ebene liegt. Die Lage des $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ - $\bar{Z}$ -Systems bezüglich des ξ - η - ζ -Systems, in dem wir die Außenteilchen vorher beschrieben haben, wird durch die Eulerschen Winkel $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ festgelegt. Im $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ - $\bar{Z}$ -System hat das Proton die Polarkoordinaten $r_p, u, 0$. Wie in [34] erläutert wird, gilt:

$$(C, VIII, 15) \quad Y_{\Lambda_b-\Lambda'_b}^{*j_N}(N) = D_{\Lambda_b-\Lambda'_b, 0}^{*j_N}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{2j_N+1}{4\pi}}$$

$$(C, VIII, 16) \quad Y_{\Delta'_a - \Delta_a}^{j_P}(p) = \sum_m D_{\Delta'_a - \Delta_a, m}^{j_P}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) Y_m^{j_P}(u, 0)$$

$$(C, VIII, 17) \quad \sin \vartheta_P d\vartheta_P \sin \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_P d\varphi_N = \sin \bar{\beta} d\bar{\beta} \sin u du d\bar{\alpha} d\bar{\gamma}.$$

Unter Verwendung von (C, VIII, 13) bis (C, VIII, 17) ergibt sich dann, da $O(r)$ nur u , nicht aber $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ enthält,

$$(C, VIII, 18) \quad \begin{aligned} W_{\Delta_a, \Delta_b, \Delta'_a, \Delta'_b}^{l_a, l_b, l'_a, l'_b} &= \\ &= \sum_{j_P, j_N, m} (-1)^{\Delta_a + \Delta'_b} \sqrt{\frac{(2l_a+1)(2l_b+1)(2l'_a+1)(2l'_b+1)}{4\pi \cdot 4\pi \cdot 4\pi \cdot (2j_N+1)}} \\ &\quad C_{-\Delta_a, \Delta'_a, \Delta'_a - \Delta_a}^{l_a, l'_a, j_P} C_{0, 0, 0}^{l_a, l'_a, j_P} C_{\Delta_b, -\Delta'_b, \Delta_b - \Delta'_b}^{l_b, l'_b, j_N} C_{0, 0, 0}^{l_b, l'_b, j_N} \\ &\quad \int_0^\pi Y_m^{j_P}(u, 0) O(r) \sin u du \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{\Delta_b - \Delta'_b, 0}^{*j_N} D_{\Delta'_a - \Delta_a, m}^{j_P} d\bar{\alpha} \sin \bar{\beta} d\bar{\beta} d\bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen der Kreiseigenfunktionen

$$(C, VIII, 19) \quad \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{\Delta_b - \Delta'_b, 0}^{*j_N} D_{\Delta'_a - \Delta_a, m}^{j_P} d\bar{\alpha} \sin \bar{\beta} d\bar{\beta} d\bar{\gamma} = \\ &= \frac{8\pi^2}{2j_P+1} \delta_{j_P, j_N} \delta_{m, 0} \delta_{\Delta_b - \Delta'_b, \Delta'_a - \Delta_a} \end{aligned}$$

erhalten wir dann :

$$(C, VIII, 20) \quad \begin{aligned} W_{\Delta_a, \Delta_b, \Delta'_a, \Delta'_b}^{l_a, l_b, l'_a, l'_b} &= \\ &= \sum_j (-1)^{\Delta_a + \Delta'_b} \frac{2\pi}{2j+1} \sqrt{\frac{(2l_a+1)(2l_b+1)(2l'_a+1)(2l'_b+1)}{4\pi (2j+1)}} \\ &\quad C_{-\Delta_a, \Delta'_a, \Delta'_a - \Delta_a}^{l_a, l'_a, j} C_{0, 0, 0}^{l_a, l'_a, j} C_{\Delta_b, -\Delta'_b, \Delta_b - \Delta'_b}^{l_b, l'_b, j} C_{0, 0, 0}^{l_b, l'_b, j} \\ &\quad \delta_{\Delta_a + \Delta_b, \Delta'_a + \Delta'_b} \int_0^\pi Y_0^j(u, 0) O(r) \sin u du. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\text{XINT}_{N_P, N_N, j}^{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N} =$$

(C, VIII, 21)

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty R_{n_P, \ell_P}^{N_P}(\tau_P) R_{n_N, \ell_N}^{N_N}(\tau_N) R_{n'_P, \ell'_P}^{N_P}(\tau_P) R_{n'_N, \ell'_N}^{N_N}(\tau_N) O(\tau) Y_0^j(u, 0) \tau_P^2 \tau_N^2 \sin u \, d\tau_P d\tau_N$$

$$\text{XJMT}_{N_P, N_N, j}^{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N} =$$

(C, VIII, 22)

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty R_{n_P, \ell_P}^{N_P}(\tau_P) R_{n_N, \ell_N}^{N_N}(\tau_N) R_{n'_N, \ell'_N}^{N_N}(\tau_P) R_{n'_P, \ell'_P}^{N_P}(\tau_N) O(\tau) Y_0^j(u, 0) \tau_P^2 \tau_N^2 \sin u \, d\tau_P d\tau_N$$

sowie mit der sinngemäß angewandten Formel (C, VIII, 20)

gehen wir in (C, VIII, 8) und (C, VIII, 10) ein und erhalten :

$$\langle \psi_P, \Omega_P, \gamma_N, \Omega_N | V_{0,5} | \psi_P, \Omega_P, \gamma_N, \Omega_N \rangle =$$

$$= \sum_{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N, \tau_P, \tau_N, \tau'_P, \tau'_N, j} (-1)^{\Omega_P - \tau_P + \Omega_N - \tau'_N} \frac{2\pi}{2j+1} \sqrt{\frac{(2\ell_P+1)(2\ell_N+1)(2\ell'_P+1)(2\ell'_N+1)}{4\pi(2j+1)}}$$

(C, VIII, 23)

$$N_{\ell_P, \tau_P}^{\gamma_P, \Omega_P} N_{\ell_N, \tau_N}^{\gamma_N, \Omega_N} N_{\ell'_P, \tau'_P}^{\gamma_P, \Omega_P} N_{\ell'_N, \tau'_N}^{\gamma_N, \Omega_N}$$

$$C_{-\Omega_P + \tau_P, \Omega_P - \tau'_P, \tau_P - \tau'_P}^{\ell_P, \ell'_P, j} C_{\Omega_N - \tau_N, -\Omega_N + \tau'_N, \tau'_N - \tau_N}^{\ell_N, \ell'_N, j} C_{0,0,0}^{\ell_P, \ell'_P, j} C_{0,0,0}^{\ell_N, \ell'_N, j}$$

$$\text{XINT}_{N_P, N_N, j}^{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N} \cdot S_{\tau'_P, \tau'_N}^{\tau_P, \tau_N}(\alpha) \delta_{\tau'_P + \tau'_N, \tau_P + \tau_N}$$

$$\langle \psi_P, \Omega_P, \gamma_N, \Omega_N | V_{P,5} | \psi_P, \Omega_P, \gamma_N, \Omega_N \rangle =$$

$$= \sum_{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N, \tau_P, \tau_N, \tau'_P, \tau'_N, j} (-1)^{\Omega_P - \tau_P + \Omega_P - \tau'_P} \frac{2\pi}{2j+1} \sqrt{\frac{(2\ell_P+1)(2\ell_N+1)(2\ell'_P+1)(2\ell'_N+1)}{4\pi(2j+1)}}$$

(C, VIII, 24)

$$N_{\ell_P, \tau_P}^{\gamma_P, \Omega_P} N_{\ell_N, \tau_N}^{\gamma_N, \Omega_N} N_{\ell'_P, \tau'_P}^{\gamma_P, \Omega_P} N_{\ell'_N, \tau'_N}^{\gamma_N, \Omega_N} C_{0,0,0}^{\ell_P, \ell'_P, j} C_{0,0,0}^{\ell_N, \ell'_N, j}$$

$$C_{-\Omega_P + \tau_P, \Omega_N - \tau'_N, \Omega_N - \Omega_P + \tau_P - \tau'_N}^{\ell_P, \ell'_P, j} C_{\Omega_N - \tau_N, -\Omega_P + \tau'_P, \Omega_N - \Omega_P + \tau'_P - \tau_N}^{\ell_N, \ell'_N, j}$$

$$\cdot \text{XJMT}_{N_P, N_N, j}^{\ell_P, \ell_N, \ell'_P, \ell'_N} S_{\tau'_P, \tau'_N}^{\tau_P, \tau_N}(\alpha) \delta_{\tau'_P + \tau'_N, \tau_P + \tau_N}$$

Durch Anwendung der Symmetrierelationen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten und der Nilsson-Koeffizienten :

$$(C, VIII, 25) \quad C_{-K_1, -K_2, -K}^{\ell_1, \ell_2, j} = (-1)^{j-\ell_1-\ell_2} C_{K_1, K_2, K}^{\ell_1, \ell_2, j}$$

$$(C, VIII, 26) \quad N_{\ell, \tau}^{j, -K} = N_{\ell, -\tau}^{j, K}$$

ergibt sich sofort :

$$(C, VIII, 27) \quad \langle \nu_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N | V_{0,S} | \nu_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle = \langle \nu_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{0,S} | \nu_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N \rangle$$

$$(C, VIII, 28) \quad \langle \nu_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N | V_{p,S} | \nu_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle = \langle \nu_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{p,S} | \nu_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N \rangle.$$

Nunmehr sind noch die Matrixelemente $\langle \nu_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{0,S} | \nu_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle$ und $\langle \nu_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{p,S} | \nu_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle$ zu untersuchen. Durch völlig analoge Rechnung ergibt sich unter Benützung der Symmetrierelationen der Nilsson-Koeffizienten:

$$(C, VIII, 29) \quad \begin{aligned} & \langle \nu_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{0,S} | \nu_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle = \\ & = \sum_{\ell_p, \ell_N, \ell_p', \ell_N', \tau_p, \tau_N, \tau_p', \tau_N', j} (-1)^{\Omega_p - \Omega_N - \tau_p + \tau_N} \frac{2\pi}{2j+1} \sqrt{\frac{(2\ell_p+1)(2\ell_N+1)(2\ell_p'+1)(2\ell_N'+1)}{4\pi(2j+1)}} \\ & N_{\ell_p, \tau_p}^{\nu_p, \Omega_p} N_{\ell_N, \tau_N}^{\gamma_N, \Omega_N} N_{\ell_p', \tau_p'}^{\nu_p, -\Omega_p} N_{\ell_N', \tau_N'}^{\gamma_N, -\Omega_N} C_{0,0,0}^{\ell_p, \ell_p', j} C_{0,0,0}^{\ell_N, \ell_N', j} \\ & C_{-\Omega_p + \tau_p, -\Omega_p + \tau_p', -2\Omega_p + \tau_p + \tau_p'}^{\ell_p, \ell_p', j} C_{\Omega_N - \tau_N, \Omega_N - \tau_N', 2\Omega_N - \tau_N - \tau_N'}^{\ell_N, \ell_N', j} \\ & \text{XINT}_{N_p, N_N}^{\ell_p, \ell_N, \ell_p', \ell_N'} S_{-\tau_p', -\tau_N'}^{\tau_p, \tau_N}(\alpha) \delta_{\Omega_p + \Omega_N - \tau_p - \tau_N, -\Omega_p - \Omega_N + \tau_p' + \tau_N'}. \end{aligned}$$

Da, wie aus genauer Betrachtung von $S_{-\tau_p', -\tau_N'}^{\tau_p, \tau_N}(\alpha)$ hervorgeht, stets in diesem der Faktor $\delta_{\tau_p' + \tau_N', -\tau_p - \tau_N}$ enthalten ist, muß wegen dem letzten Kroneckersymbol in (C, VIII, 29) gelten: $\Omega_p + \Omega_N = -\Omega_p - \Omega_N = 0$. Daraus folgt: $\Omega_N = -\Omega_p$; sonst verschwindet dieses Matrixelement grundsätzlich. Für den Operator $V_{p,S}$ ergibt sich :

$$\begin{aligned}
 & \langle \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{QS} | \gamma_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle = \\
 & = \sum_{\substack{\ell_p, \ell_N, \ell'_p, \ell'_N, \tau_p, \tau_N, \tau'_p, \tau'_N, j}} (-1)^{\tau_p - \tau_p'} \frac{2\pi}{2j+1} \sqrt{\frac{(2\ell_p+1)(2\ell_N+1)(2\ell'_p+1)(2\ell'_N+1)}{4\pi \cdot (2j+1)}} \\
 (C, VIII, 30) \quad & N_{\ell_p, \tau_p}^{\gamma_p, \Omega_p} N_{\ell_N, \tau_N}^{\gamma_N, \Omega_N} N_{\ell'_p, \tau'_p}^{\gamma_p, \Omega_p} N_{\ell'_N, \tau'_N}^{\gamma_N, \Omega_N} C_{0,0,0}^{\ell_p, \ell'_p, j} C_{0,0,0}^{\ell_N, \ell'_N, j} \\
 & C_{-\Omega_p + \tau_p, -\Omega_N + \tau'_N, \tau_p + \tau'_N}^{\ell_p, \ell'_p, j} C_{\Omega_N - \tau_N, \Omega_p - \tau'_p, -\tau_N - \tau'_p}^{\ell_N, \ell'_N, j} \\
 & X \Xi M \Pi_{N_p, N_N}^{\ell_p, \ell_N, \ell'_p, \ell'_N} S_{-\tau'_p, -\tau'_N}^{\tau_p, \tau_N}(\alpha) \delta_{\Omega_p + \Omega_N, -\Omega_N - \Omega_p}.
 \end{aligned}$$

Wegen des letzten Kroneckersymbols verschwindet auch dieses Matricelement für $\Omega_p + \Omega_p \neq 0$ grundsätzlich. Wegen der Symmetrierelationen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten und Nilsson-Koeffizienten gilt auch hier wieder :

$$(C, VIII, 31) \quad \langle \gamma_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N | V_{QS} | \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N \rangle = \langle \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{QS} | \gamma_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle$$

$$(C, VIII, 32) \quad \langle \gamma_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N | V_{PS} | \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N \rangle = \langle \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{PS} | \gamma_p, -\Omega_p, \gamma_N, -\Omega_N \rangle.$$

Da nun nach A,V gilt :

$$(C, VIII, 33) \quad \Psi_{\gamma, K}^0 = \Psi_{\gamma_p, \Omega_p}^P \Psi_{\gamma_N, \Omega_N}^N = | \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N \rangle \quad \text{für } K \neq 0$$

folgt :

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_{\gamma, K}^0 | V_{PN} | \Psi_{\gamma, K}^0 \rangle = \\
 (C, VIII, 34) \quad & = (1-\delta) \langle \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{QS} | \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N \rangle + \delta \langle \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N | V_{PS} | \gamma_p, \Omega_p, \gamma_N, \Omega_N \rangle
 \end{aligned}$$

und mit (C, VIII, 27) und (C, VIII, 28) erhält man :

$$(C, VIII, 35) \quad \langle \Psi_{\gamma, -K}^0 | V_{PN} | \Psi_{\gamma, -K}^0 \rangle = \langle \Psi_{\gamma, K}^0 | V_{PN} | \Psi_{\gamma, K}^0 \rangle.$$

Mit (C, VIII, 23) und (C, VIII, 24) sind dann für $K \neq 0$ die

gesuchten Matrixelemente berechnet.

Weiter gilt nach A, V :

$$\begin{aligned} \Psi_{q\pm,0}^0 &= \{ \Psi_{p,\Omega_P}^P \Psi_{N,\Omega_N}^N \pm (-1)^{N_P+N_N-1} \Psi_{p,-\Omega_P}^P \Psi_{N,-\Omega_N}^N \} = \\ (C, VIII, 36) \quad &= \{ |p, \Omega_P, N, \Omega_N\rangle \pm (-1)^{N_P+N_N-1} |p, -\Omega_P, N, -\Omega_N\rangle \}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{q\pm,0}^0 | V_{PN} | \Psi_{q\pm,0}^0 \rangle &= \\ (C, VIII, 37) \quad &= \langle p, \Omega_P, N, \Omega_N | V_{PN} | p, \Omega_P, N, \Omega_N \rangle + \langle p, -\Omega_P, N, -\Omega_N | V_{PN} | p, -\Omega_P, N, -\Omega_N \rangle + \\ &\pm (-1)^{N_P+N_N-1} \{ \langle p, \Omega_P, N, \Omega_N | V_{PN} | p, -\Omega_P, N, -\Omega_N \rangle + \\ &+ \langle p, -\Omega_P, N, -\Omega_N | V_{PN} | p, \Omega_P, N, \Omega_N \rangle \}. \end{aligned}$$

Mit (C, VIII, 27), (C, VIII, 28), (C, VIII, 31) und (C, VIII, 32) gilt dann :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{q\pm,0}^0 | V_{PN} | \Psi_{q\pm,0}^0 \rangle &= \\ (C, VIII, 38) \quad &= 2(1-\gamma) \langle p, \Omega_P, N, \Omega_N | V_{QS} | p, \Omega_P, N, \Omega_N \rangle + 2\gamma \langle p, \Omega_P, N, \Omega_N | V_{PS} | p, \Omega_P, N, \Omega_N \rangle + \\ &\pm (-1)^{N_P+N_N-1} \cdot 2 \{ (1-\gamma) \langle p, \Omega_P, N, \Omega_N | V_{QS} | p, -\Omega_P, N, -\Omega_N \rangle + \\ &+ \gamma \langle p, \Omega_P, N, \Omega_N | V_{PS} | p, -\Omega_P, N, -\Omega_N \rangle \}. \end{aligned}$$

Damit sind unter Verwendung von (C, VIII, 23), (C, VIII, 24), (C, VIII, 29) und (C, VIII, 30) auch für $K = 0$ die gesuchten Matrixelemente bestimmt.

2. Explizite Bestimmung der Radialintegrale

Zu berechnen sind Ausdrücke der Art

$$(C, VIII, 39) \quad X_{N_i, N_K, N_j, N_a, l}^{l_i, l_K, l_j, l_a} = \int_0^\infty \int_0^\pi R_{n_i, l_i}^{N_i}(\tau_p) R_{n_K, l_K}^{N_K}(\tau_N) R_{n_j, l_j}^{N_j}(\tau_p) R_{n_a, l_a}^{N_a}(\tau_N) \cdot Y_0^l(u, 0) O(\tau) \tau_p^2 \tau_N^2 \sin u \, du \, d\tau_p \, d\tau_N.$$

Dann sind nämlich wegen

$$(C, VIII, 40) \quad XINT_{N_P, N_N, j}^{l_P, l_N, l_P', l_N'} = X_{N_P, N_N, N_P, N_N, j}^{l_P, l_N, l_P', l_N'}$$

$$(C, VIII, 41) \quad X3MT_{N_P, N_N, j}^{l_P, l_N, l_P', l_N'} = X_{N_P, N_N, N_N, N_P, j}^{l_P, l_N, l_N', l_P'}$$

die in C, VIII, 1 gesuchten Ausdrücke berechnet.

Mit :

$$(C, VIII, 42) \quad \lambda = \frac{m_R \omega}{\hbar}, \quad g_i^2 = \lambda \tau_p^2, \quad g_K^2 = \lambda \tau_N^2, \quad n_u = (N_u - l_u)/2 \quad (u = i, K, j, a)$$

$$(C, VIII, 43) \quad O(\tau) = e^{-\beta/\lambda (g_i^2 + g_K^2 - 2g_i g_K \cos u)}$$

$$(C, VIII, 44) \quad R_{n_u, l_u}^{N_u}(\tau_{p,N}) = \sqrt{\frac{2n_u!}{\Gamma(n_u + l_u + \frac{3}{2})}} \lambda^{3/4} g_{i,K}^{l_u} e^{-g_{i,K}^2/2} L_{n_u}^{l_u + \frac{1}{2}}(g_{i,K}^2)$$

$$(C, VIII, 45) \quad \lambda^3 \tau_p^2 \tau_N^2 \sin u \, du \, d\tau_p \, d\tau_N = g_i^2 \cdot g_K^2 \sin u \, du \, dg_i \, dg_K$$

$$(C, VIII, 46) \quad Y_0^l(u, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_l^N(\cos u)$$

$$(C, VIII, 47) \quad UR = 4 \sqrt{n_i! n_K! n_j! n_a!} / \sqrt{\Gamma(n_i + l_i + \frac{1}{2}) \cdot \Gamma(n_K + l_K + \frac{1}{2}) \Gamma(n_j + l_j + \frac{1}{2}) \Gamma(n_a + l_a + \frac{1}{2})}$$

erhalten wir dann :

$$(C, VIII, 48) \quad X_{N_i, N_K, N_j, N_a, l}^{l_i, l_K, l_j, l_a} = UR \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi g_i^{l_i + l_j + 2} g_K^{l_K + l_a + 2} e^{-g_i^2 - g_K^2} L_{n_i}^{l_i + \frac{1}{2}}(g_i^2) L_{n_K}^{l_K + \frac{1}{2}}(g_K^2) L_{n_j}^{l_j + \frac{1}{2}}(g_i^2) L_{n_a}^{l_a + \frac{1}{2}}(g_K^2) e^{-\beta/\lambda (g_i^2 + g_K^2)} \cdot \int_0^\pi P_l^N(\cos u) e^{2\beta/\lambda g_i g_K \cos u} \sin u \, du \, dg_i \, dg_K.$$

Wir untersuchen zunächst das über u laufende Integral :
Es gilt :

$$(C, VIII, 49) \quad \int_0^\pi P_\ell^N(\cos u) e^{2\beta/\lambda g_i g_K \cos u} \sin u \, du = \\ = \sum_{r=0}^{\ell} \left\{ (-1)^r \frac{P_\ell^N(1)}{(2\beta/\lambda g_i g_K)^{r+1}} e^{2\beta/\lambda g_i g_K} - (-1)^r \frac{P_\ell^N(-1)}{(2\beta/\lambda g_i g_K)^{r+1}} e^{-2\beta/\lambda g_i g_K} \right\}$$

($P_\ell^N(x)$ = normiertes Legendrepolynom, $P_\ell^{N(r)}(x)$ dessen r -te Ableitung)

Die durch Rechnung über Gegenbauerpolynome gewonnenen Beziehungen

$$(C, VIII, 50a) \quad P_\ell^{N(r)}(1) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \left(\frac{r-\frac{1}{2}}{r} \right) r! \left(\frac{\ell+r}{\ell-r} \right) 2^r$$

$$(C, VIII, 50b) \quad P_\ell^{N(r)}(-1) = (-1)^{\ell-r} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \left(\frac{r-\frac{1}{2}}{r} \right) r! \left(\frac{\ell+r}{\ell-r} \right) 2^r$$

setzen wir in (C, VIII, 49) ein und erhalten :

$$(C, VIII, 51) \quad \int_0^\pi P_\ell^N(\cos u) e^{2\beta/\lambda g_i g_K \cos u} \sin u \, du = \\ = \sum_{r=0}^{\ell} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \left(\frac{r-\frac{1}{2}}{r} \right) r! \left(\frac{\ell+r}{\ell-r} \right) 2^r \left(\frac{\lambda}{2\beta} \right)^{r+1} (g_i g_K)^{-r-1} \left\{ (-1)^r e^{2\beta/\lambda g_i g_K} - (-1)^{\ell-r} e^{-2\beta/\lambda g_i g_K} \right\}.$$

Mit (C, VIII, 51) gehen wir in (C, VIII, 48) ein und erhalten :

$$(C, VIII, 52) \quad \chi_{N_i, N_K, N'_i, N'_K, \ell}^{\ell_i, \ell_K, \ell'_i, \ell'_K} = \\ = UR \cdot \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sum_{r=0}^{\ell} \left(\frac{r-\frac{1}{2}}{r} \right) r! \left(\frac{\ell+r}{\ell-r} \right) \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^{r+1} \frac{1}{2} \cdot \\ \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g_i^{\ell_i + \ell'_i + 2 - r - 1} g_K^{\ell_K + \ell'_K + 2 - r - 1} L_{n_i}^{\ell_i + \frac{1}{2}}(g_i^2) L_{n_j}^{\ell'_j + \frac{1}{2}}(g_j^2) \cdot e^{-g_i^2 - g_K^2} \cdot \\ \cdot L_{n_K}^{\ell_K + \frac{1}{2}}(g_K^2) L_{n_a}^{\ell'_a + \frac{1}{2}}(g_a^2) \left\{ (-1)^r e^{-\beta/\lambda (g_i - g_K)^2} - (-1)^{\ell-r} e^{-\beta/\lambda (g_i + g_K)^2} \right\} dg_i dg_K.$$

Unter Verwendung der Formel

$$(C, VIII, 53) \quad L_{n_u}^{\ell_u + \frac{1}{2}}(g^2) = \sum_{v_u=0}^{n_u} \binom{n_u + \ell_u + \frac{1}{2}}{n_u - v_u} \frac{(-1)^{v_u}}{v_u!} g^{2v_u}$$

und der Abkürzungen

$$(C, VIII, 54) \quad m_i = l_i + l_j + 2 - \tau - 1 + 2v_i + 2v_j, \quad m_K = l_K + l_a + 2 - \tau - 1 + 2v_K + 2v_a$$

erhalten wir :

$$(C, VIII, 55) \quad \begin{aligned} X_{N_i, N_K, N_j, N_a, \ell}^{l_i, l_K, l_j, l_a} &= UR \sqrt{\frac{2\ell+1}{16\pi}} \sum_{\tau=0}^{\ell} \left(\tau - \frac{1}{2}\right) \tau! \left(\ell - \tau\right) \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\tau+1} \cdot \\ &\sum_{v_i, v_K, v_j, v_a} \frac{\binom{n_i + l_i + \frac{1}{2}}{v_i} \binom{n_K + l_K + \frac{1}{2}}{v_K} \binom{n_j + l_j + \frac{1}{2}}{v_j} \binom{n_a + l_a + \frac{1}{2}}{v_a} \frac{(-1)^{v_i + v_K + v_j + v_a}}{v_i! \cdot v_K! \cdot v_j! \cdot v_a!} \cdot \\ &\cdot \left\{ (-1)^{\tau} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_i^{m_i} g_K^{m_K} e^{-g_i^2 - g_K^2} e^{-\beta/2 (g_i - g_K)^2} dg_i dg_K - \right. \\ &\left. - (-1)^{\ell} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_i^{m_i} g_K^{m_K} e^{-g_i^2 - g_K^2} e^{-\beta/2 (g_i + g_K)^2} dg_i dg_K \right\}. \end{aligned}$$

Mit den im folgenden noch zu berechnenden Doppelintegralen

$$(C, VIII, 56) \quad TP_{m_K}^{m_i} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_i^{m_i} g_K^{m_K} e^{-g_i^2 - g_K^2} e^{-\beta/2 (g_i - g_K)^2} dg_i dg_K$$

$$(C, VIII, 57) \quad TM_{m_K}^{m_i} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_i^{m_i} g_K^{m_K} e^{-g_i^2 - g_K^2} e^{-\beta/2 (g_i + g_K)^2} dg_i dg_K$$

ergibt sich dann einfach :

$$(C, VIII, 58) \quad \begin{aligned} X_{N_i, N_K, N_j, N_a, \ell}^{l_i, l_K, l_j, l_a} &= UR \sqrt{\frac{2\ell+1}{16\pi}} \sum_{\tau=0}^{\ell} \left(\tau - \frac{1}{2}\right) \tau! \left(\ell - \tau\right) \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\tau+1} \cdot \\ &\sum_{v_i, v_K, v_j, v_a} \frac{\binom{n_i + l_i + \frac{1}{2}}{v_i} \binom{n_K + l_K + \frac{1}{2}}{v_K} \binom{n_j + l_j + \frac{1}{2}}{v_j} \binom{n_a + l_a + \frac{1}{2}}{v_a} \frac{(-1)^{v_i + v_K + v_j + v_a}}{v_i! \cdot v_K! \cdot v_j! \cdot v_a!} \cdot \\ &\cdot \left\{ (-1)^{\tau} TP_{m_K}^{m_i} - (-1)^{\ell} TM_{m_K}^{m_i} \right\}. \end{aligned}$$

Die noch nicht explizit bekannten Doppelintegrale sollen nun weiter behandelt werden. Mit der Substitution

$$(C, VIII, 59) \quad g_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma - z), \quad g_K = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + z)$$

gilt zunächst :

$$(C, VIII, 60) \quad (g_i - g_K)^2 = 2z^2, \quad (g_i + g_K)^2 = 2\gamma^2, \quad g_i^2 + g_K^2 = \gamma^2 + z^2$$

$$(C, VIII, 61) \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dg_i dg_K \rightarrow \int_0^{\infty} d\gamma \int_{-\gamma}^{+\gamma} dz.$$

Damit und mit (C,VIII,56) und (C,VIII,57) erhält man :

$$(C,VIII,62) \quad TP_{m_K}^{m_i} = \int_0^{\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right)^{m_i} \left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)^{m_K} e^{-(y^2+(1+2\beta/\lambda)z^2)} dz dy$$

$$(C,VIII,63) \quad TM_{m_K}^{m_i} = \int_0^{\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right)^{m_i} \left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)^{m_K} e^{-(z^2+(1+2\beta/\lambda)y^2)} dz dy.$$

Mit Hilfe von

$$(C,VIII,64) \quad \left(\frac{y+z}{\sqrt{2}}\right)^{m_K} = \sum_{l_K} \binom{m_K}{l_K} y^{m_K-l_K} z^{l_K} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m_K}$$

$$(C,VIII,65) \quad \left(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\right)^{m_i} = \sum_{l_i} \binom{m_i}{l_i} y^{m_i-l_i} z^{l_i} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m_i} (-1)^{l_i}$$

ergibt sich :

$$(C,VIII,66) \quad TP_{m_K}^{m_i} = \sum_{l_i, l_K} \binom{m_i}{l_i} \binom{m_K}{l_K} (-1)^{l_i} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m_i+m_K} EX_{1, l_i+l_K}^{m_i+m_K-l_i-l_K}$$

$$(C,VIII,67) \quad TM_{m_K}^{m_i} = \sum_{l_i, l_K} \binom{m_i}{l_i} \binom{m_K}{l_K} (-1)^{l_i} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m_i+m_K} EX_{2, l_i+l_K}^{m_i+m_K-l_i-l_K},$$

wobei die Abkürzungen

$$(C,VIII,68) \quad \begin{aligned} EX_{1, l_i+l_K}^{m_i+m_K-l_i-l_K} &= \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} y^{m_i+m_K-l_i-l_K} z^{l_i+l_K} e^{-(y^2+(1+2\beta/\lambda)z^2)} dz dy \end{aligned}$$

$$(C,VIII,69) \quad \begin{aligned} EX_{2, l_i+l_K}^{m_i+m_K-l_i-l_K} &= \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} y^{m_i+m_K-l_i-l_K} z^{l_i+l_K} e^{-(z^2+(1+2\beta/\lambda)y^2)} dz dy \end{aligned}$$

verwendet wurden. Beide lassen sich auf das Integral

$$(C,VIII,70) \quad E_{b,c}^{u,v} = \int_0^{\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} y^u z^v e^{-(cy^2+bz^2)} dz dy$$

zurückführen, denn es gilt :

$$(C,VIII,71) \quad EX_{1, l_i+l_K}^{m_i+m_K-l_i-l_K} = E_{1, (1+2\beta/\lambda)}^{m_i+m_K-l_i-l_K, l_i+l_K}$$

$$(C, VIII, 72) \quad EX_{2, i_i + i_k}^{m_i + m_k - i_i - i_k} = E_{(1+2\beta/\lambda), 1}^{m_i + m_k - i_i - i_k, i_i + i_k}$$

Durch die Substitution

$$(C, VIII, 73) \quad y = \frac{1}{\sqrt{c}} r \cos \varphi, \quad z = \frac{1}{\sqrt{b}} r \sin \varphi, \quad \varphi_0 = \arctan \sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$\int_{-y}^{+y} dz dy \rightarrow \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{c \cdot b}}$$

erhalten wir schließlich :

$$(C, VIII, 74) \quad E_{b,c}^{u,v} = \int_0^{\varphi_0} r^{u+v+1} e^{-r^2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \cos \varphi \right)^u \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sin \varphi \right)^v \frac{1}{\sqrt{c \cdot b}} d\varphi dr.$$

Dabei gilt für die verbliebenen Integrale :

$$(C, VIII, 75) \quad \int_0^{\varphi_0} r^{u+v+1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{u+v+2}{2}\right)$$

$$(C, VIII, 76) \quad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{c \cdot b}} d\varphi = 2\varphi_0 \frac{1}{\sqrt{c \cdot b}}$$

$$(C, VIII, 77) \quad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \cos \varphi \right)^u \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sin \varphi \right)^v \frac{1}{\sqrt{c \cdot b}} d\varphi = 0, \text{ wenn } v \text{ ungerade}$$

$$(C, VIII, 78) \quad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^{v+1} \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \varphi^{2k} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^{v+1} \frac{2}{2^v} \binom{v}{k} \varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^{v+1} \frac{2 \cdot (-1)^k}{2^{v-1}} \sum_{\lambda=0}^{k-1} (-1)^\lambda \binom{v}{\lambda} \frac{\sin(v-2\lambda)\varphi_0}{v-2\lambda} \quad (v=2k)$$

$$(C, VIII, 79) \quad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \cos \varphi \right)^u \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sin \varphi \right)^v \frac{1}{\sqrt{c \cdot b}} d\varphi =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \right)^{u+1} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^{v+1} (\sin \varphi_0)^{2k+1} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(2n-2, \lambda)}{(2k+2n, 2, \lambda+1)} (\cos \varphi_0)^{2n-2\lambda} \quad \left(\begin{array}{l} u=2n+1 \\ v=2k \end{array} \right)$$

$$(C, VIII, 80) \quad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \cos \varphi \right)^u \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sin \varphi \right)^v \frac{1}{\sqrt{c \cdot b}} d\varphi =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \right)^{u+1} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^{v+1} \{ (\sin \varphi_0)^{2k+1} \sum_{\lambda=1}^n \frac{(2n-1, 2, \lambda-1)}{(2k+2n, 2, \lambda)} (\cos \varphi_0)^{2n-2\lambda+1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(2n-1, 2, n)}{(2k+2n, 2, n)} \left[\frac{2}{2^v} \binom{v}{k} \varphi_0 + \frac{2 \cdot (-1)^k}{2^{v-1}} \sum_{\lambda=0}^{k-1} (-1)^\lambda \binom{v}{\lambda} \frac{\sin(v-2\lambda)\varphi_0}{v-2\lambda} \right] \} \quad \left(\begin{array}{l} u=2n \\ v=2k \end{array} \right).$$

Mit (C,VIII,75) bis (C,VIII,80) kann $E_{b,c}^{u,v}$ berechnet werden. Damit sind alle Bestandteile der Radialintegrale explizit aufgeführt. Mittels eines Computerprogramms wird über diese Bestandteile aufsummiert und damit das gesuchte Radialintegral bestimmt.

IX. Transformation der körperfesten kartesischen Komponenten eines Vektors in die raumfesten kartesischen Komponenten und umgekehrt

Wir haben ein raumfestes X-Y-Z-System und ein dagegen um die Eulerschen Winkel verdrehtes "körperfestes" oder "rumpffestes" $\xi-\eta-\zeta$ -System. Einen beliebigen Vektor $\underline{A}$ können wir in kartesischen Komponenten bezüglich beider Systeme angeben, wobei wir den Vektor aufs raumfeste System bezogen mit $\underline{A}$ und aufs körperfeste System bezogen mit $\underline{A}^K$ bezeichnen. Die Transformation der raumfesten Komponenten in körperfeste und umgekehrt ist von der gegenseitigen Lage der beiden Koordinatensysteme, also von α, β, γ abhängig. Um diese Abhängigkeit durch bekannte Funktionen, nämlich die Darstellungskoeffizienten der Drehgruppe, die $D_{m,k}^j$ ausdrücken zu können, empfiehlt es sich, von kartesischen Vektorkomponenten auf sphärische überzugehen.

1. Definition von sphärischen Komponenten eines Vektors

Seien mit A_x, A_y, A_z die kartesischen Komponenten eines Vektors gegeben, dann sind durch

$$(C, IX, 1) \quad A_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-A_x - iA_y), \quad A_0 = A_z, \quad A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y)$$

die sphärischen Komponenten A_{+1}, A_0, A_{-1} des Vektors $\underline{A}$ gegeben. Wir bezeichnen in Zukunft den Index für kartesische Komponenten mit u, v, w, r, s , den für sphärische mit i, j, k, l, m, n .

Obige Definition läßt sich mit einer unitären Transformationsmatrix $\underline{t}$ wie folgt schreiben :

$$(C, IX, 2) \quad A_i = \sum_v t_{i,v} A_v, \text{ wobei } \underline{t} = (t_{iv}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} i = -1, 0, 1 \\ v = x, y, z \end{matrix}$$

Da $\underline{t}$ unitär ist, also $\underline{t}^{-1} = \underline{t}^+$, gilt für die Umkehrtransformation :

$$(C, IX, 3) \quad A_u = \sum_j t_{u,j}^{-1} A_j = \sum_j t_{j,u}^* A_j.$$

2. Transformation von körperfesten sphärischen Komponenten auf raumfeste sphärische und umgekehrt

Aus [9] entnehmen wir :

$$(C, IX, 4) \quad A_j^K = \sum_i D_{i,j}^{1*}(\alpha, \beta, \gamma) A_i, \quad A_i = \sum_j D_{i,j}^1(\alpha, \beta, \gamma) A_j^K.$$

Dabei sind die $D_{i,j}^1(\alpha, \beta, \gamma)$, kurz mit $D_{i,j}^1$ bezeichnet, die üblichen Kreiseigenfunktionen. Aus C, IX, 1 und C, IX, 2 läßt sich nun die Gesamttransformation berechnen.

3. Transformation von körperfesten kartesischen Komponenten auf raumfeste kartesische und umgekehrt

Es gilt :

$$(C, IX, 5) \quad A_u^K = \sum_j t_{j,u}^* A_j^K = \sum_{j,i} t_{j,u}^* D_{i,j}^{1*} A_i = \sum_{j,i,v} t_{j,u}^* t_{i,v} D_{i,j}^{1*} A_v.$$

Also :

$$(C, IX, 6) \quad A_u^K = \sum_v \sum_{i,j} t_{j,u}^* t_{i,v} D_{i,j}^{1*} A_v$$

dabei ist $\sum_{i,j} t_{j,u}^* t_{i,v} D_{i,j}^{1*}$ für alle u, v reell, und es gilt :

$$(C, IX, 7) \quad \sum_{i,j} t_{j,u}^* t_{i,v} D_{i,j}^{1*} = \sum_{i,j} t_{j,u} t_{i,v}^* D_{i,j}^1.$$

In Matrizenschreibweise gilt :

$$(C, IX, 8) \quad \underline{A}^K = \underline{S}^K \underline{A}, \quad \text{wobei} \quad \underline{S}^K = (\underline{S}_{u,v}^K) \quad \text{mit} \quad S_{u,v}^K = \sum_{i,j} t_{j,u} t_{i,v}^* D_{i,j}^1.$$

Damit ist das in (B,II,28) benötigte $\underline{S}^K$ explizit angegeben.

Für die Umkehrtransformation gilt :

$$(C,IX,9) \quad A_v = \sum_u \sum_{j,i} t_{i,v}^* t_{j,u} D_{i,j}^1 A_u^K.$$

In Matrizenschreibweise erhalten wir :

$$(C,IX,10) \quad \underline{A} = \underline{S}^{K^{-1}} \underline{A}^K, \text{ wobei } \underline{S}^{K^{-1}} = \underline{S}^{K,\dagger}.$$

X. Umrechnung des Wechselwirkungsterms H_{ww}^1 auf eine Form, aus der die in B, II benötigten Stromausdrücke direkt entnommen werden können.

1. Für q-q-Kerne

Es gilt :

$$(C, X, 1) \quad \underline{\mu} = \int \underline{s} \cdot \underline{r} \times \underline{Q}(\underline{r}) d\tau.$$

Dann folgt :

$$(C, X, 2) \quad \underline{\mu}^K = \underline{\underline{S}}^K \underline{\mu} = \int \underline{\underline{S}}^K \underline{s} \cdot (\underline{r} \times \underline{Q}(\underline{r})) d\tau$$

und wir erhalten :

$$(C, X, 3) \quad \underline{L}_R^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{\mu}^K = \int \underline{L}_R^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{\underline{S}}^K \cdot (\underline{r} \times \underline{Q}(\underline{r})) d\tau.$$

Durchschieben des Kreuzes ergibt :

$$(C, X, 4) \quad \underline{L}_R^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{\mu}^K = \int \underline{s} \{ (\underline{L}_R^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{\underline{S}}^K) \times \underline{r} \} \cdot \underline{Q}(\underline{r}) d\tau.$$

Außerdem gilt :

$$\begin{aligned} (C, X, 5) \quad \underline{\mu}^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{L}_R^K &= \int \underline{\underline{S}}^K \cdot \underline{s} \cdot (\underline{r} \times \underline{Q}(\underline{r})) \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{L}_R^K d\tau = \\ &= \int \underline{s} (\underline{r} \times \underline{Q}(\underline{r})) (\underline{\underline{S}}^{\underline{K}, T} \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{L}_R^K) d\tau = \int \underline{Q}(\underline{r}) \cdot \underline{s} \{ (\underline{\underline{S}}^{\underline{K}, T} \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{L}_R^K) \times \underline{r} \} d\tau. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich :

$$\begin{aligned} (C, X, 6) \quad H_{ww, q, q}^1 &= -\frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{\mu}^K - \frac{1}{2} \underline{\mu}^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{L}_R^K = \\ &= -\int \left[\frac{1}{2} \{ \underline{s} \{ (\underline{L}_R^K \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{\underline{S}}^K) \times \underline{r} \} \} \cdot \underline{Q}(\underline{r}) + \frac{1}{2} \underline{Q}(\underline{r}) \{ \underline{s} \{ (\underline{\underline{S}}^{\underline{K}, T} \underline{\underline{Q}}^{\underline{K}, -1} \underline{L}_R^K) \times \underline{r} \} \} \right] d\tau \end{aligned}$$

2. Für u-g- und g-u-Kerne

Es gilt :

$$(C, X, 7) \quad \underline{q}(-\frac{1}{A}x, \alpha, \beta, \gamma) = \int \underline{s}(x_1, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{Q}(-\frac{1}{A}x + x_1) dx_1.$$

Einführung der Integrationsvariablen $x' = x_1 - \frac{1}{A}x$ ergibt :

$$(C, X, 8) \quad \underline{q}(-\frac{1}{A}x, \alpha, \beta, \gamma) = \int \underline{s}(x' + \frac{1}{A}x, \alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{Q}(x') dx'.$$

Es gilt :

$$(C, X, 9) \quad \underline{\mu}_{ug} = \int \underline{s}(x_1, \alpha, \beta, \gamma) \cdot x_1 \times \underline{Q}(x_1 - \frac{1}{A}x) dx_1.$$

Einführung der Integrationsvariablen $x' = x_1 - \frac{1}{A}x$ ergibt :

$$(C, X, 10) \quad \underline{\mu}_{ug} = \int \underline{s}(x' + \frac{1}{A}x, \alpha, \beta, \gamma) \cdot (x' + \frac{1}{A}x) \times \underline{Q}(x') dx'.$$

Wegen :

$$(C, X, 11) \quad \begin{aligned} & (\frac{P}{m_R} + C \underline{s} x) \{ \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} e \underline{Q}(\frac{A^{-1}}{A} x) - \frac{1}{A} \underline{q}(-\frac{1}{A} x, \alpha, \beta, \gamma) \} = \\ & = \int [(\frac{P}{m_R} + C \underline{s} x) \{ \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} e \delta(x' - \frac{A^{-1}}{A} x) - \frac{1}{A} \underline{s}(x' + \frac{1}{A} x, \alpha, \beta, \gamma) \} \underline{Q}(x')] dx' \end{aligned}$$

und

$$(C, X, 12) \quad \begin{aligned} & -\frac{e}{2m} g (\underline{s} \times \frac{A}{A-1} \nabla) \underline{Q}(\frac{A^{-1}}{A} x) = \\ & = \int -\frac{e}{2m} g \delta(x' - \frac{A^{-1}}{A} x) \cdot (\underline{s} \times \nabla') \underline{Q}(x') dx' \end{aligned}$$

sowie unter Verwendung von (C, X, 6) gilt dann :

$$\begin{aligned}
 H_{ww,ug}^1 &= - \left(\frac{p}{m_R} + C_{sx\tau} \right) \left\{ \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} e \, \underline{O} \left(\frac{A^{-1}}{A} \tau \right) - \frac{1}{A} \underline{g} \left(-\frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \right\} - \\
 &\quad - \frac{e}{2m} \, g \left(s \times \frac{A}{A^{-1}} \nabla' \right) \underline{O} \left(\frac{A^{-1}}{A} \tau \right) - \frac{1}{2} \underline{L}_R^K \underline{\odot}^{K,-1} \underline{\mu}_{ug}^K - \frac{1}{2} \underline{\mu}_{ug} \underline{\odot}^{K,-1} \underline{L}_R^K = \\
 (C, X, 13) \quad &= - \int \frac{1}{2} \left\{ \left[+ 2 \left(\frac{p}{m_R} + C_{sx\tau} \right) \left\{ \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} e \, \delta \left(\tau' - \frac{A^{-1}}{A} \tau \right) + \frac{1}{A} s \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \right\} + \right. \right. \\
 &\quad + \frac{1}{m} g \left(\tau' - \frac{A^{-1}}{A} \tau \right) \cdot (s \times \nabla') + s \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \left(\underline{L}_R^K \underline{\odot}^{K,-1} \underline{S}^K \right) \times \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau \right) \left. \right] \underline{O}(\tau') + \\
 &\quad + \underline{O}(\tau') \left[s \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \cdot \left(\underline{S}^{K,T} \underline{\odot}^{K,-1} \underline{L}_R^K \right) \times \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau \right) \right] \right\} d\tau'.
 \end{aligned}$$

Vergleich mit

$$(C, X, 14) \quad H_{ww,ug}^1 = - \int \frac{1}{2} \left\{ \underline{\dot{S}}_{ug}(\tau') \underline{O}(\tau') + \underline{O}(\tau') \underline{\dot{S}}_{ug}(\tau') \right\} d\tau$$

liefert dann :

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{S}}_{ug}(\tau') &= \\
 (C, X, 15) \quad &= 2 \left(\frac{p}{m_R} + C_{sx\tau} \right) \left\{ e \varepsilon \frac{A^{-1}}{A} \delta \left(\tau' - \frac{A^{-1}}{A} \tau \right) + \frac{1}{A} s \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{m} g \left(\tau' - \frac{A^{-1}}{A} \tau \right) \cdot (s \times \nabla') + s \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \cdot \left(\underline{L}_R^K \underline{\odot}^{K,-1} \underline{S}^K \right) \times \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau \right) \\
 \underline{\dot{S}}_{ug}(\tau') &= \\
 (C, X, 16) \quad &= s \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau, \alpha, \beta, \gamma \right) \cdot \left(\underline{S}^{K,T} \underline{\odot}^{K,-1} \underline{L}_R^K \right) \times \left(\tau' + \frac{1}{A} \tau \right).
 \end{aligned}$$

XI. Berechnung von $\hat{\underline{\mu}}^{K\pm}$ in Quadrupolnäherung

Aus (B,III,11) entnehmen wir $\hat{\underline{\mu}}^{K\pm}$ in Quadrupolnäherung zu

$$(C,XI,1) \quad \hat{\underline{\mu}}^{K\pm} = \mp \frac{i\omega}{c} \underline{e}_p \times \underline{Q}^K \underline{e}_k,$$

wobei gilt :

$$(C,XI,2) \quad \underline{Q}^K = \begin{pmatrix} Q_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix} = Q_0 (\delta_{vw}) \quad \text{mit } Q_1 = Q_2 := Q_0.$$

Nun soll $\hat{\underline{\mu}}^{K\pm}$ durch die raumfesten Komponenten von $\underline{e}_p$ und $\underline{e}_k$ ausgedrückt werden. Unter Benützung von

$$(C,XI,3) \quad \begin{aligned} e_{p\tau}^K &= \sum_{i_1, j_1, v_1} t_{j_1, \tau}^* t_{i_1, v_1}^* D_{i_1, j_1}^1 e_{pv_1} \\ e_{ks}^K &= \sum_{i_2, j_2, v_2} t_{j_2, s}^* t_{i_2, v_2}^* D_{i_2, j_2}^1 e_{kv_2} \end{aligned}$$

erhalten wir für die u-te körperfeste Komponente von :

$$(C,XI,4) \quad \begin{aligned} \hat{\mu}_u^{K\pm} &= \mp \frac{i\omega}{c} (\underline{e}_p \times \underline{Q}^K \underline{e}_k)_u = \mp \frac{i\omega}{c} \sum_{\tau, s} \varepsilon_{u, \tau, s} e_{p\tau}^K Q_s^K e_{ks}^K = \\ &= \mp \frac{i\omega}{c} \sum_{\tau, s, i_1, i_2, j_1, j_2, v_1, v_2} \varepsilon_{u, \tau, s} t_{j_1, \tau}^* t_{j_2, s}^* t_{i_1, v_1}^* t_{i_2, v_2}^* \cdot \\ &\quad \cdot Q_s D_{i_1, j_1}^1 D_{i_2, j_2}^1 e_{pv_1} e_{pv_2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$(C,XI,5) \quad D_{i_1, j_1}^1 D_{i_2, j_2}^1 = \sum_{\tilde{j}, m, k} C_{i_1, i_2, m}^{1,1,\tilde{j}} C_{j_1, j_2, k}^{1,1,\tilde{j}} D_{m, k}^{\tilde{j}}$$

gilt dann :

$$(C,XI,6) \quad \begin{aligned} \hat{\mu}_u^{K\pm} &= \mp \frac{i\omega}{c} \sum_{\tau, s, i_1, i_2, j_1, j_2, v_1, v_2, m, k, \tilde{j}} \varepsilon_{u, \tau, s} t_{j_1, \tau}^* t_{j_2, s}^* C_{j_1, j_2, k}^{1,1,\tilde{j}} \cdot \\ &\quad t_{i_1, v_1}^* t_{i_2, v_2}^* C_{i_1, i_2, m}^{1,1,\tilde{j}} D_{m, k}^{\tilde{j}} Q_s e_{pv_1} e_{pv_2}. \end{aligned}$$

Mit

$$(C, XI, 7) \quad F(\tau, s, k, \bar{z}) = \sum_{\bar{s}_1, \bar{s}_2} t_{\bar{s}_1, \tau} t_{\bar{s}_2, s} C_{\bar{s}_1, \bar{s}_2, k}^{1, 1, \bar{z}}$$

$$F^*(v_1, v_2, m, \bar{z}) = \sum_{i_1, i_2} t_{i_1, v_1}^* t_{i_2, v_2}^* C_{i_1, i_2, m}^{1, 1, \bar{z}}$$

ergibt sich :

$$(C, XI, 8) \quad \hat{\mu}_u^{K\pm} = \mp \frac{i\omega}{c} \sum_{\tau, s, v_1, v_2, m, k, \bar{z}} \epsilon_{u, \tau, s} Q_s \cdot F(\tau, s, k, \bar{z}) \cdot F^*(v_1, v_2, m, \bar{z}) D_{m, k}^{\bar{z}} e_{pv_1} e_{kv_2}.$$

Diese Vielfachsumme spalten wir in drei Summen S_{Ju} mit $J = 0, 1, 2$ auf :

$$(C, XI, 9) \quad \hat{\mu}_u^{K\pm} = \mp \frac{i\omega}{c} (S_{0u} + S_{1u} + S_{2u})$$

und untersuchen zunächst S_{0u} . Wegen $J = 0 \Rightarrow m = k = 0$ und es gilt :

$$(C, XI, 10) \quad S_{0u} = \sum_{\tau, s, v_1, v_2} \epsilon_{u, \tau, s} Q_s F(\tau, s, 0, 0) F^*(v_1, v_2, 0, 0) D_{0, 0}^0 e_{pv_1} e_{kv_2}.$$

Wie in C, XIII gezeigt wird, gilt :

$$(C, XI, 11) \quad F(\tau, s, 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{\tau, s} \quad , \quad F^*(v_1, v_2, 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{v_1, v_2}.$$

Dann folgt :

$$(C, XI, 12) \quad S_{0u} = \frac{1}{3} \sum_{\tau, s, v_1, v_2} \epsilon_{u, \tau, s} Q_s \delta_{\tau, s} \delta_{v_1, v_2} D_{0, 0}^0 e_{pv_1} e_{kv_2} = 0 \quad ,$$

da $\epsilon_{u, \tau, s} \delta_{\tau, s} = 0$.

Als nächstes untersuchen wir S_{1u} :

$$(C, XI, 13) \quad S_{1u} =$$

$$= \sum_{\tau, s, v_1, v_2, m, k} \epsilon_{u, \tau, s} Q_s F(\tau, s, k, 1) F^*(v_1, v_2, m, 1) D_{m, k}^1 e_{pv_1} e_{kv_2}.$$

Wie in C,XIII gezeigt wird, gilt :

$$(C, XI, 14) \quad F(\tau, s, k, 1) = \frac{i}{12} \sum_t \varepsilon_{t, \tau, s} t_{k, t}$$

$$F^*(v_1, v_2, m, 1) = -\frac{i}{12} \sum_w \varepsilon_{w, v_1, v_2} t_{m, w}^*.$$

Dann folgt :

$$(C, XI, 15) \quad S_{1u} = \sum_{\tau, s, v_1, v_2, t, w, m, k} \frac{1}{2} \varepsilon_{u, \tau, s} \varepsilon_{t, \tau, s} Q_s t_{k, t} t_{m, w}^* D_{m, k}^1 \varepsilon_{w, v_1, v_2} e_{p v_1} e_{k v_2} =$$

$$= \sum_{w, m, k} \frac{1}{2} \{ \delta_{u, 1} (Q_3 + Q_0) + \delta_{u, 2} (Q_3 + Q_0) + 2 \delta_{u, 3} Q_0 \} t_{k, u} t_{m, w}^* D_{m, k}^1 (\varepsilon_p \times \varepsilon_k)_w$$

$$(C, XI, 16) \quad S_{1u} = \frac{1}{2} (Q_0 + Q_3) \sum_{w, m, k} t_{k, u} t_{m, w}^* D_{m, k}^1 (\varepsilon_p \times \varepsilon_k)_w -$$

$$- \frac{1}{2} (Q_3 - Q_0) \delta_{u, 3} \sum_{w, m} t_{m, w}^* D_{m, 0}^1 (\varepsilon_p \times \varepsilon_k)_w.$$

Nun wird noch S_{2u} betrachtet :

$$(C, XI, 17) \quad S_{2u} = \sum_{\tau, s, v_1, v_2, m, k} \varepsilon_{u, \tau, s} Q_s F(\tau, s, k, 2) F^*(v_1, v_2, m, 2) D_{m, k}^2 e_{p v_1} e_{k v_2}.$$

Aus C,XIII entnehmen wir :

$$(C, XI, 18) \quad F(\tau, s, k, 2) = F(s, \tau, k, 2).$$

Wegen

$$(C, XI, 19) \quad Q_1 = Q_2 = Q_0$$

gilt :

$$(C, XI, 20) \quad S_{2u} = \sum_{\tau, s, v_1, v_2, m, k} \varepsilon_{u, \tau, s} Q_0 F(\tau, s, k, 2) F^*(v_1, v_2, m, 2) D_{m, k}^2 e_{p v_1} e_{k v_2} -$$

$$+ (Q_3 - Q_0) \sum_{\tau, v_1, v_2, m, k} \varepsilon_{u, \tau, 3} F(\tau, 3, k, 2) F^*(v_1, v_2, m, 2) D_{m, k}^2 e_{p v_1} e_{k v_2} =$$

$$= -(Q_0 - Q_3) \sum_{v_1, v_2, m, k} \{ \delta_{u, 1} F(2, 3, k, 2) - \delta_{u, 2} F(1, 3, m, 2) \} F^*(v_1, v_2, m, 2) D_{m, k}^2 e_{p v_1} e_{k v_2}.$$

Aus C,XIII entnehmen wir :

$$(C, XI, 21) \quad F(2,3,k,2) = -\frac{i}{2} \delta_{k,1} - \frac{i}{2} \delta_{k,-1}, \quad F(1,3,k,2) = -\frac{1}{2} \delta_{k,1} + \frac{1}{2} \delta_{k,-1}$$

$$(C, XI, 22) \quad F^*(v_1, v_2, m, 2) = \frac{1}{2} T^2(m)_{v_1 v_2} - \frac{1}{16} \delta_{v_1 v_2},$$

wobei $T^2(m)_{v_1 v_2}$ ein Element der Matrix $\underline{T}^2(m)$ aus (B, III, 14) ist. Dann folgt :

$$(C, XI, 23) \quad S_{2u} = \frac{i}{\sqrt{8}} (Q_3 - Q_0) \sum_m \underline{e}_K \underline{T}^2(m) \underline{e}_P \cdot \\ \cdot \{ \delta_{u,1} (-\frac{1}{\sqrt{2}} D_{m,1}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} D_{m,-1}^2) + \delta_{u,2} (-\frac{i}{\sqrt{2}} D_{m,1}^2 + \frac{i}{\sqrt{2}} D_{m,-1}^2) \}.$$

Insgesamt erhalten wir :

$$(C, XI, 24) \quad \hat{\mu}_u^{K\dagger} = \pm \frac{i\omega}{2c} (Q_0 + Q_3) \sum_{w,m,K} t_{K,u} t_{m,w}^* D_{m,K}^1 (\underline{e}_K \times \underline{e}_P)_w \pm \\ \pm \frac{i\omega}{2c} (Q_0 - Q_3) \sum_{w,m} t_{m,w}^* D_{m,0}^1 (\underline{e}_K \times \underline{e}_P)_w \delta_{u,3} \pm \\ \pm \frac{\omega}{\sqrt{8}c} (Q_3 - Q_0) \sum_m \underline{e}_K \underline{T}^2(m) \underline{e}_P \cdot \\ \cdot \{ \delta_{u,1} (-\frac{1}{\sqrt{2}} D_{m,1}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} D_{m,-1}^2) + \delta_{u,2} (-\frac{i}{\sqrt{2}} D_{m,1}^2 + \frac{i}{\sqrt{2}} D_{m,-1}^2) \}.$$

Damit ist (B, III, 13) hergeleitet.

XII. Explizite Ermittlung von $\hat{H}_{WW,gg}^{1\pm}$

Mit (B,III,16) gilt :

$$(C, XII, 1) \quad \hat{H}_{WW,gg}^{1\pm} = -\hat{\mu}^{K\pm} \left(\frac{1}{\Theta_0} L_R^K + \hat{\mu}_3^{K\pm} \left(\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Theta_3} \right) L_{R3}^K - \frac{1}{2} L_R^K \left[\frac{1}{\Theta_0} \hat{\mu}^{K\pm} \right] + \frac{1}{2} L_{R3}^K \left[\left(\frac{1}{\Theta_0} - \frac{1}{\Theta_3} \right) \hat{\mu}_3^{K\pm} \right] \right)$$

Wegen

$$(C, XII, 2) \quad \sum_{u,k} L_{Ru}^K t_{k,u} D_{m,k}^1 = \sum_K L_{Rk}^K D_{m,k}^1 = L_{R-1}^K D_{m,-1}^1 + L_{R0}^K D_{m,0}^1 + L_{R+1}^K D_{m,+1}^1$$

und mit

$$(C, XII, 3) \quad L_{R-1}^K D_{m,-1}^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{2} D_{m,0}^1, \quad L_{R+1}^K D_{m,+1}^1 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{2} D_{m,0}^1, \quad L_{R0}^K D_{m,0}^1 = 0$$

gilt :

$$(C, XII, 4) \quad \sum_{u,k} L_{Ru}^K t_{k,u} D_{m,k}^1 = 0.$$

Damit fallen für die Terme mit $D_{m,k}^1$ von $\hat{\mu}^{K\pm}$ die Anteile von $\hat{H}_{WW,gg}^{1\pm}$ weg, bei denen L_R^K auf $\hat{\mu}^{K\pm}$ wirkt. Es verbleiben :

$$(C, XII, 5) \quad \begin{aligned} \hat{H}_{WW,gg}^{1\pm} &= \mp \frac{i\omega}{2c} \frac{(Q_0 + Q_3)}{\Theta_0} \sum_{w,m,k,u} t_{k,u} t_{m,w}^* D_{m,k}^1 (\varepsilon_K \times \varepsilon_P)_w L_{Ru}^K \mp \\ &\mp \frac{i\omega}{2c} \left(\frac{2Q_0}{\Theta_3} - \frac{Q_3 - Q_0}{\Theta_0} \right) \sum_{w,m} t_{m,w}^* D_{m,0}^1 (\varepsilon_K \times \varepsilon_P)_w L_{R0}^K \mp \\ &\mp \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \frac{Q_3 - Q_0}{\Theta_0} \sum_m \varepsilon_K I^{(2)}(m) \varepsilon_P \left\{ D_{m,+1}^2 L_{R+1}^K - D_{m,-1}^2 L_{R-1}^K + \frac{1}{2} L_{R+1}^K D_{m,+1}^2 - \frac{1}{2} L_{R-1}^K D_{m,-1}^2 \right\} \end{aligned}$$

Wegen

$$(C, XII, 6) \quad L_{R+1}^K D_{m,+1}^2 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{6} D_{m,0}^2, \quad L_{R-1}^K D_{m,-1}^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{6} D_{m,0}^2$$

gilt dann schließlich :

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{\text{WW},93}^{1\pm} &= \mp \frac{i\omega}{2c} \frac{(Q_0 + Q_3)}{\Theta_0} e_K x_{\mathbb{P}} L_R \\
 (C, \text{XII}, 7) \quad &+ \frac{i\omega}{c} \left\{ \frac{Q_0}{\Theta_3} - \frac{Q_3 + Q_0}{2\Theta_0} \right\} \sum_{w, m} t_{m, w}^x D_{m, 0}^1 (e_K x_{\mathbb{P}})_w L_{R, 0}^K \\
 &+ \frac{\omega}{c} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{Q_3 - Q_0}{\Theta_0} \sum_m e_K T^{(m)} e_{\mathbb{P}} \{ D_{m+1}^2 L_{R+1} - D_{m-1}^2 L_{R-1} + \frac{1}{\sqrt{3}} D_m^2 \}.
 \end{aligned}$$

wobei auch (C, IX, 9) benützt wurde. Damit ist dann (B, III, 18) gezeigt.

XIII. Eigenschaften der Ausdrücke $F(r, s, k, j)$

1. Symmetrieuntersuchungen

Wegen der Symmetrieeigenschaften der $t_{i,v}$

$$(C, XIII, 1) \quad t_{-i,v} = (-1)^{i+v+1} t_{i,v}$$

und der Symmetrieeigenschaften der Clebsch-Gordankoeffizienten

$$(C, XIII, 2) \quad C_{-j_1, -j_2, -k}^{1,1,\bar{3}} = (-1)^{\bar{3}-1-1} C_{j_1, j_2, k}^{1,1,\bar{3}}$$

können wir folgern :

$$\begin{aligned} F(r, s, -k, \bar{3}) &= \sum_{j_1, j_2} t_{j_1, r} t_{j_2, s} C_{j_1, j_2, -k}^{1,1,\bar{3}} = \\ (C, XIII, 3) \quad &= \sum_{j_1, j_2} (-1)^{\bar{3}+j_1+j_2+r+s} t_{j_1, r} t_{j_2, s} C_{j_1, j_2, k}^{1,1,\bar{3}} = \\ &= (-1)^{\bar{3}+k+r+s} F(r, s, k, \bar{3}). \end{aligned}$$

Es gilt also :

$$(C, XIII, 4) \quad F(r, s, -k, \bar{3}) = (-1)^{\bar{3}+k+r+s} F(r, s, k, \bar{3}).$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} F(s, r, k, \bar{3}) &= \sum_{j_1, j_2} t_{j_1, s} t_{j_2, r} C_{j_1, j_2, k}^{1,1,\bar{3}} = \sum_{j_1, j_2} t_{j_2, s} t_{j_1, r} C_{j_2, j_1, k}^{1,1,\bar{3}} = \\ (C, XIII, 5) \quad &= \sum_{j_1, j_2} t_{j_1, r} t_{j_2, s} (-1)^{\bar{3}} C_{j_1, j_2, k}^{1,1,\bar{3}} = (-1)^{\bar{3}} F(r, s, k, \bar{3}). \end{aligned}$$

Das bedeutet :

$$(C, XIII, 6) \quad F(s, r, k, \bar{3}) = (-1)^{\bar{3}} F(r, s, k, \bar{3}).$$

2. Suche nach einfachen Zusammenhängen

Wenn A, B Vektoren sind und A_{j_1} , B_{j_2} ihre sphärischen Komponenten, dann gilt: Die sphärischen Komponenten von A lassen sich mit denen von B durch Clebsch-Gordan-Kopplung zu sphärischen Tensoren $V_0^{(0)}$, $V_k^{(1)}$, $V_k^{(2)}$ vom Rang 0, 1 und 2 zusammenkoppeln.

$$(C, XIII, 7) \quad V_k^{(3)} = \sum_{j_1, j_2} C_{j_1, j_2, k}^{1, 1, 3} A_{j_1} B_{j_2}.$$

Drückt man die sphärischen Komponenten von A und B durch die kartesischen Komponenten aus, so erhält man:

$$(C, XIII, 8) \quad V_k^{(3)} = \sum_{j_1, j_2, \tau, s} C_{j_1, j_2, k}^{1, 1, 3} t_{j_1, \tau} t_{j_2, s} A_{\tau} B_s = \sum_{\tau, s} F(\tau, s, k, 3) A_{\tau} B_s.$$

Aus den kartesischen Komponenten von A und B läßt sich durch Bildung des dyadischen Produkts ein Tensor

$$(C, XIII, 9) \quad T_{\tau, s} = A_{\tau} B_s$$

gewinnen. Dieser besteht aus Anteilen, die sich wie ein Skalar ${}_0T$, wie ein Vektor ${}_1T_w$ und wie ein Tensor 2. Stufe (symmetrisch mit Spur null) ${}_2T_{u, w}$ transformieren. Diese Anteile projiziert man aus $T_{\tau, s}$ durch folgende Verfahren:

$$(C, XIII, 10a) \quad {}_0T = \frac{1}{3} \sum_{\tau, s} \delta_{\tau, s} A_{\tau} B_s$$

$$(C, XIII, 10b) \quad {}_1T_w = \frac{1}{2} \sum_{\tau, s} \epsilon_{w, \tau, s} A_{\tau} B_s$$

$$(C, XIII, 10c) \quad {}_2T_{u, w} = \sum_{\tau, s} \Delta_{u, w; \tau, s} A_{\tau} B_s,$$

dabei ist

$$(C, XIII, 11) \quad \Delta_{u, w; \tau, s} = \frac{1}{2} (\delta_{u, \tau} \delta_{w, s} + \delta_{u, s} \delta_{w, \tau}) - \frac{1}{3} \delta_{u, w} \delta_{\tau, s}.$$

Nun muß zwischen den kartesischen und den sphärischen Tensoren gleicher Stufe ein linearer Zusammenhang bestehen. Wir setzen an :

$$(C, XIII, 12a) \quad V_0^{(0)} = t_0^{(0)} T = t_0^{(0)} \frac{1}{3} \sum_{\tau, s} \delta_{\tau, s} A_{\tau} B_s$$

$$(C, XIII, 12b) \quad V_k^{(1)} = \sum_w t_{k,w}^{(1)} T_w = \frac{1}{2} \sum_{w, \tau, s} t_{k,w}^{(1)} \varepsilon_{w, \tau, s} A_{\tau} B_s$$

$$(C, XIII, 12c) \quad V_k^{(2)} = \sum_{u, w} t_{k, u, w}^{(2)} T_{u, w} = \sum_{u, w, \tau, s} t_{k, w}^{(2)} \Delta_{u, w, \tau, s} A_{\tau} B_s.$$

Falls es möglich ist, sind jetzt die Größen $t_0^{(0)}$, $t_{k,w}^{(1)}$ und $t_{k,u,w}^{(2)}$ zu bestimmen.

a) Bestimmung von $t_0^{(0)}$

Wegen der Freiheit, A_r und B_s beliebig zu wählen, liefert ein Vergleich von (C, XIII, 8) mit (C, XIII, 12a)

$$(C, XIII, 13) \quad F(\tau, s, 0, 0) = \frac{1}{3} t_0^{(0)} \delta_{\tau, s}.$$

$t_0^{(0)}$ wird an einem Spezialfall bestimmt; für $r = s = 1$ gilt :

$$(C, XIII, 14) \quad \begin{aligned} F(1, 1, 0, 0) &= \sum_{j_1, j_2} C_{j_1, j_2, 0}^{1, 1, 0} t_{j_1, 1} t_{j_2, 1} = C_{-1, 1, 0}^{1, 1, 0} t_{-1, 1} t_{1, 1} + \\ &+ C_{0, 0, 0}^{1, 1, 0} t_{0, 1} t_{0, 1} + C_{1, -1, 0}^{1, 1, 0} t_{1, 1} t_{-1, 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$(C, XIII, 15) \quad \frac{1}{3} t_0^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t_0^{(0)} = -\sqrt{3}$$

und es folgt :

$$(C, XIII, 16) \quad F(\tau, s, 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{\tau, s}.$$

b) Bestimmung von $t_{k,w}^{(1)}$

Da sich $\sum_{r,s} \varepsilon_{w,r,s} A_r B_s$ wie die Vektorkomponente C_w verhält, liegt der Ansatz nahe :

$$(C, XIII, 17) \quad t_{k,w}^{(1)} = \alpha^{(1)} t_{k,w}.$$

Vergleich von (C, XIII, 8) mit (C, XIII, 12b) liefert dann, da A_r und B_s beliebig :

$$(C, XIII, 18) \quad F(r, s, k, 1) = \frac{1}{2} \alpha^{(1)} \sum_w t_{k,w} \varepsilon_{w,r,s}.$$

$\alpha^{(1)}$ wird am Spezialfall $r = 1, s = 2, k = 0$ bestimmt :

$$(C, XIII, 19) \quad \begin{aligned} F(1, 2, 0, 1) &= \sum_{j_1, j_2} C_{j_1, j_2, 0}^{1, 1, 1} t_{j_1, 1} t_{j_2, 2} = C_{1-1, 0}^{1, 1, 1} t_{1, 1} t_{-1, 2} + \\ &+ C_{-1, 1, 0}^{1, 1, 1} t_{-1, 1} t_{1, 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$(C, XIII, 20) \quad \frac{1}{2} \alpha^{(1)} \sum_w t_{0,w} \varepsilon_{w,1,2} = \frac{1}{2} \alpha^{(1)}.$$

Dann gilt :

$$(C, XIII, 21) \quad \frac{1}{2} \alpha^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^{(1)} = i \sqrt{2}$$

und es folgt :

$$(C, XIII, 22) \quad F(r, s, k, 1) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_w t_{k,w} \varepsilon_{w,r,s}.$$

c) Bestimmung von $t_{k,u,w}^{(2)}$

Hier verbleibt nur der Ansatz :

$$(C, XIII, 23) \quad t_{k,u,w}^{(2)} = \sum_{j_1, j_2} C_{j_1, j_2, k}^{1, 1, 2} t_{j_1, u} t_{j_2, w}.$$

Vergleich von (C,XIII,8) mit (C,XIII,12c) liefert dann,
da A_r und B_s beliebig :

$$(C,XIII,24) \quad F(r,s,k,2) = \sum_{j_1, j_2, u, w, r, s} C_{j_1, j_2, k}^{1,1,2} t_{j_1, u} t_{j_2, w} \Delta_{u, w; r, s}.$$

Dies bringt keine Vereinfachung. Also muß $F(r,s,k,2)$
für alle r,s,k unter Benützung der Symmetrierelationen
aus seiner Definitionsgleichung berechnet werden.

Man erhält :

$$(C,XIII,25) \quad F(r,s,k,2) = G(k)_{r,s} - \frac{1}{\sqrt{6}} \delta_{r,s},$$

wobei

$$(C,XIII,26) \quad \underline{\underline{G}}(k) = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} \delta_{K,2} + \frac{1}{2} \delta_{K-2}), (\frac{i}{2} \delta_{K,2} - \frac{i}{2} \delta_{K-2}), (-\frac{2}{2} \delta_{K,1} + \frac{1}{2} \delta_{K-1}) \\ (\frac{i}{2} \delta_{K,2} - \frac{i}{2} \delta_{K-2}), (-\frac{1}{2} \delta_{K,2} - \frac{1}{2} \delta_{K-2}), (-\frac{i}{2} \delta_{K,1} - \frac{i}{2} \delta_{K-1}) \\ (-\frac{1}{2} \delta_{K,1} + \frac{1}{2} \delta_{K-1}), (-\frac{i}{2} \delta_{K,1} - \frac{i}{2} \delta_{K-1}), \frac{1}{2} \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt dann, wie aus der Gestalt von $\underline{\underline{T}}^2(k)$ sofort
ersichtlich ist,

$$(C,XIII,27) \quad \underline{\underline{G}}^*(k) = \frac{1}{2} \underline{\underline{T}}^2(k)$$

und somit

$$(C,XIII,28) \quad F^*(v_1, v_2, m, 2) = \frac{1}{2} T^2(m)_{v_1, v_2} - \frac{1}{\sqrt{6}} \delta_{v_1, v_2}.$$

Damit sind alle in C,XI benötigten Formeln hergeleitet.

XIV. Herleitung der expliziten Gestalt von $\hat{H}_{WW,T}^{1\pm}$

Für die ersten beiden Terme von $\hat{H}_{WW,ug}^{1\pm}$, die wir kurz mit $\hat{H}_{WW,T}^{1\pm}$ bezeichnet haben, entnehmen wir aus (B,III,38) den folgenden Ausdruck :

$$(C,XIV,1) \quad \hat{H}_{WW,T}^{1\pm} = - \left(\frac{e p}{m_R} + e C \underline{s} x \underline{r} \right) \left\{ \varepsilon \frac{A-1}{A} \left(1 \pm \frac{A-1}{A} i \underline{k} \underline{r} \right) - \frac{1}{A} (z-\varepsilon) \left(1 \pm \frac{1}{A} i \underline{k} \underline{r} \right) \right\} e_p \mp \frac{e i}{2m} g(\underline{s} \times \underline{k}) e_p.$$

Einführung der effektiven Ladungen

$$(C,XIV,2) \quad e^* = e \left(\varepsilon \frac{A-1}{A} - \frac{1}{A} (z-\varepsilon) \right), \quad e^{**} = e \left(\varepsilon \left(\frac{A-1}{A} \right)^2 + \frac{1}{A^2} (z-\varepsilon) \right)$$

bringt $\hat{H}_{WW,T}^{1\pm}$ auf die Form :

$$(C,XIV,3) \quad \hat{H}_{WW,T}^{1\pm} = - \left(\frac{p}{m_R} + C \underline{s} x \underline{r} \right) e^* e_p \mp \left(\frac{p}{m_R} + C \underline{s} x \underline{r} \right) e^{**} i \underline{k} \underline{r} e_p \mp \frac{e i}{2m} g(\underline{s} \times \underline{k}) e_p = \hat{H}_{WW,1}^{1\pm} + \hat{H}_{WW,2}^{1\pm} + \hat{H}_{WW,3}^{1\pm}.$$

Mit (B,III,37) $\equiv$

$$(C,XIV,4) \quad \frac{p}{m_R} + C \underline{s} x \underline{r} = \frac{i}{\hbar} (H_{ug} \underline{r} - \underline{r} H_{ug})$$

ergibt sich dann für den Term $\hat{H}_{WW,1}^{1\pm}$:

$$(C,XIV,5) \quad \hat{H}_{WW,1}^{1\pm} = - e^* \frac{i}{\hbar} (H_{ug} \underline{r} - \underline{r} H_{ug}) e_p.$$

Mit der Abkürzung

$$(C,XIV,6) \quad \underline{b} = \frac{p}{m_R} + C \underline{s} x \underline{r}$$

erhalten wir zunächst für den Term $\hat{H}_{WW,2}^{1\pm}$:

$$(C,XIV,7) \quad \hat{H}_{WW,2}^{1\pm} = \mp i e^{**} \left(\frac{1}{2} (e_p \underline{b}) (\underline{k} \underline{r}) + \frac{1}{2} e_p (H_{ug} \underline{r} - \underline{r} H_{ug}) (\underline{k} \underline{r}) \right).$$

Mit

$$(C, XIV, 8) \quad (H_{u_3} \underline{k} \underline{r} - \underline{k} \underline{r} H_{u_3}) = \underline{k} (H_{u_3} \underline{r} - \underline{r} H_{u_3}) = \frac{\hbar}{i} \underline{k} \underline{b}$$

ergibt sich

$$(C, XIV, 9) \quad \hat{H}_{ww,2}^{1\pm} = \\ = \mp e^{**} \underline{e}_p \left\{ \frac{1}{2} \underline{b} (\underline{k} \underline{r}) + \frac{i}{2\hbar} (H_{u_3} \underline{r} (\underline{k} \underline{r}) - \underline{r} (\underline{k} \underline{r}) H_{u_3}) - \frac{1}{2} \underline{r} (\underline{k} \underline{b}) \right\}.$$

Wegen

$$(C, XIV, 10) \quad -\underline{r} (\underline{k} \underline{b}) = -\underline{k} \times (\underline{r} \times \underline{b}) - (\underline{k} \underline{r}) \underline{b} ; \quad \underline{b} (\underline{k} \underline{r}) = (\underline{k} \underline{r}) \underline{b} - \underline{k}$$

erhalten wir

$$(C, XIV, 11) \quad \hat{H}_{ww,2}^{1\pm} = \pm \frac{e^{**}}{2\hbar} \frac{\omega}{c} (H_{u_3} (\underline{e}_p \underline{r}) (\underline{e}_k \underline{r}) - (\underline{e}_p \underline{r}) (\underline{e}_k \underline{r}) H_{u_3}) \pm \\ + \frac{i e^{**}}{2} \frac{\omega}{c} \underline{e}_p \cdot (\underline{e}_k \times (\underline{r} \times \underline{b})).$$

Setzen wir $\underline{b}$ explizit ein, dann gilt :

$$(C, XIV, 12) \quad \hat{H}_{ww,2}^{1\pm} = \pm \frac{e^{**}}{2\hbar} \frac{\omega}{c} (H_{u_3} (\underline{e}_p \underline{r}) (\underline{e}_k \underline{r}) - (\underline{e}_p \underline{r}) (\underline{e}_k \underline{r}) H_{u_3}) \mp \\ + \frac{i e^{**}}{2} \frac{\omega}{c m_R} \underline{e} (\underline{e}_k \times \underline{e}_p) \mp \frac{i e^{**}}{2} \frac{\omega}{c} C (\underline{r} \times (\underline{s} \times \underline{r})) (\underline{e}_k \times \underline{e}_p).$$

Insgesamt ergibt sich schließlich für $\hat{H}_{ww,T}^{1\pm}$:

$$(C, XIV, 13) \quad \hat{H}_{ww,T}^{1\pm} = -\frac{i e^*}{\hbar} (H_{u_3} \underline{r} - \underline{r} H_{u_3}) \pm \\ + \frac{e^{**}}{2\hbar} \frac{\omega}{c} (H_{u_3} (\underline{e}_p \underline{r}) (\underline{e}_k \underline{r}) - (\underline{e}_p \underline{r}) (\underline{e}_k \underline{r}) H_{u_3}) \mp \\ + \frac{i}{2} \frac{\omega}{c} \left(\frac{e^{**}}{m_R} \underline{e} + \frac{e g}{m} \underline{s} \right) (\underline{e}_k \times \underline{e}_p) \mp \\ + \frac{i}{2} \frac{e^{**}}{c} \omega C (\underline{r} \times (\underline{s} \times \underline{r})) (\underline{e}_k \times \underline{e}_p).$$

XV. Herleitung der Formeln über das innere Dipol- und Quadrupolmoment

1. Dipolmoment

Zu untersuchen ist die Größe $i e^* \omega \underline{r} \underline{e}_p$. Wegen

$$(C, XV, 1) \quad \underline{r} \underline{e}_p = \sum_u e_{pu} r_u$$

gilt mit Hilfe der Formel (C, IX, 9)

$$(C, XV, 2) \quad r_u = \overline{\sum_{m, k, w}} t_{m, u}^* t_{k, w} D_{m, k}^1 r_w^k.$$

Führen wir die durch (B, III, 23) definierte Größe $\underline{I}^1(m)$ ein,

$$(C, XV, 3) \quad \sum_u t_{m, u}^* e_{pu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{I}^1(m) \underline{e}_p$$

dann ergibt sich mit (C, XV, 1) und (C, XV, 2) :

$$(C, XV, 4) \quad \underline{r} \underline{e}_p = \overline{\sum_{m, k, w}} \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{I}^1(m) \underline{e}_p D_{m, k}^1 t_{k, w} r_w^k.$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$(C, XV, 5) \quad r^k Y_k^1(K) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_w t_{k, w} r_w^k$$

erhalten wir schließlich :

$$(C, XV, 6) \quad \underline{r} \underline{e}_p = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_m \underline{I}^1(m) \underline{e}_p \sum_k D_{m, k}^1 \sqrt{\frac{16\pi}{3}} r^k Y_k^1(K).$$

Mit der durch

$$(C, XV, 7) \quad \hat{Q}_{1, k} = e^* \sqrt{\frac{16\pi}{3}} r^k Y_k^1(K)$$

definierten Größe $Q_{1, k}$ = k-te sphärische Komponente des inneren Dipolmoments gilt dann endlich :

$$(C, XV, 8) \quad i e^* \omega \underline{r} \underline{e}_p = \frac{1}{\sqrt{8}} \omega \sum_m i \underline{I}^1(m) \underline{e}_p \sum_k D_{m, k}^1 \hat{Q}_{1, k}.$$

2. Quadrupolmoment

Zu untersuchen ist die Größe $e^{**} \frac{\omega^2}{2c} (\underline{e}_p \cdot \underline{r})(\underline{e}_k \cdot \underline{r})$.
Wegen

$$(C, XV, 9) \quad (\underline{e}_p \cdot \underline{r})(\underline{e}_k \cdot \underline{r}) = \underline{e}_k \underline{Q} \underline{e}_p,$$

wobei gilt

$$(C, XV, 10) \quad \underline{Q} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix},$$

ergibt sich mit Verwendung von

$$(C, XV, 11) \quad \begin{aligned} x^2 &= \sqrt{\frac{2\eta}{15}} r^2 \{ Y_2^1 + Y_{-2}^2 + \sqrt{\frac{10}{3}} Y_0^0 - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_0^2 \} \\ y^2 &= \sqrt{\frac{2\eta}{15}} r^2 \{ -Y_2^2 - Y_{-2}^2 + \sqrt{\frac{40}{3}} Y_0^0 - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_0^2 \} \\ z^2 &= \sqrt{\frac{2\eta}{15}} r^2 \{ \sqrt{\frac{8}{3}} Y_0^2 + \sqrt{\frac{40}{3}} Y_0^0 \} \\ xy &= \sqrt{\frac{2\eta}{15}} i r^2 \{ Y_{-2}^2 - Y_2^2 \}, \quad xz = \sqrt{\frac{2\eta}{15}} r^2 \{ Y_{-1}^2 - Y_1^2 \}, \quad yz = \sqrt{\frac{2\eta}{15}} i r^2 \{ Y_{-1}^2 + Y_1^2 \} \end{aligned}$$

zunächst :

$$(C, XV, 12) \quad \underline{Q} = \sqrt{\frac{2\eta}{15}} r^2 \sum_m Y_m^2 \begin{pmatrix} (\delta_{m,2} + \delta_{m,-2}), i(\delta_{m,2} - \delta_{m,-2}), (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}) \\ i(\delta_{m,-2} - \delta_{m,2}), -(\delta_{m,2} + \delta_{m,-2}), i(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) \\ (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1}), i(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}), \sqrt{6} \delta_{m,0} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} r^2 \frac{2}{3} (\sqrt{\eta} Y_0^0 - \sqrt{\frac{\eta}{5}} Y_0^2).$$

Wenn wir die in (B, III, 14) definierte Matrix $\underline{T}^2(m)$ benutzen, dann ergibt sich :

$$(C, XV, 13) \quad \underline{Q} = \sqrt{\frac{2\eta}{15}} r^2 \sum_m Y_m^2 \underline{T}^2(m) + \frac{1}{3} r^2 \frac{2}{3} (\sqrt{\eta} Y_0^0 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\eta}{5}} Y_0^2).$$

Da der Term mit der Einheitsmatrix wegen $\underline{e}_k \cdot \underline{e}_p = 0$ keinen Beitrag liefert, gilt dann :

$$(C, XV, 14) \quad \underline{e}_k \underline{Q} \underline{e}_p = \sqrt{\frac{2\eta}{15}} \gamma^2 \sum_m \underline{e}_k \underline{I}^2(m) \underline{e}_p Y_m^2.$$

Mit

$$(C, XV, 15) \quad Y_m^2 = \sum_k D_{m,k}^2 Y_k^2(k), \quad \gamma^2 = (\gamma^k)^2$$

erhalten wir

$$(C, XV, 16) \quad e^{**} \frac{\omega^2}{2c} (\underline{e}_p \underline{I})(\underline{e}_k \underline{I}) = \frac{1}{\sqrt{96}} \frac{\omega^2}{c} \sum_m \underline{e}_k \underline{I}^2(m) \underline{e}_p \sum_k D_{m,k}^2 \sqrt{\frac{16\eta}{5}} (\gamma^k)^2 e^{**} Y_k^2(k)$$

und mit

$$(C, XV, 17) \quad \hat{Q}_{2,k} = e^{**} \sqrt{\frac{16\eta}{5}} (\gamma^k)^2 Y_k^2(k)$$

ergibt sich schließlich :

$$(C, XV, 18) \quad e^{**} \frac{\omega^2}{2c} (\underline{e}_p \underline{I})(\underline{e}_k \underline{I}) = \frac{1}{\sqrt{96}} \frac{\omega^2}{c} \sum_m \underline{e}_k \underline{I}^2(m) \underline{e}_p \sum_k D_{m,k}^2 \hat{Q}_{2,k}.$$

XVI. Matrizelement für E2-Übergänge innerhalb der Rotationsbande eines q-q-Kerns

Zu berechnen ist :

$$M = \langle D_{M_b,0}^L | \{ D_{M_b-M_a,1}^2 L_{R+1}^K - D_{M_b-M_a,-1}^2 L_{R-1}^K - \hbar \sqrt{3} D_{M_b-M_a,0}^2 \} | D_{M_a,0}^{L+2} \rangle.$$

Wegen :

$$(C, XVI, 2) \quad L_{R+1}^K D_{M_a,0}^{L+2} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(L+2)(L+3)} D_{M_a,1}^{L+2}$$

$$(C, XVI, 3) \quad L_{R-1}^K D_{M_a,0}^{L+2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(L+2)(L+3)} D_{M_a,1}^{L+2}$$

$$(C, XVI, 4) \quad \langle D_{M_b,0}^L | D_{M_b-M_a,v}^2 | D_{M_a,-v}^{L+2} \rangle = \frac{8\pi^2}{2L+1} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, L+2, L} C_{v, -v, 0}^{2, L+2, L}$$

gilt dann :

$$(C, XVI, 5) \quad M = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8\pi^2}{2L+1} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, L+2, L} \cdot \{ \sqrt{(L+2)(L+3)} C_{1,-1,0}^{2, L+2, L} + \sqrt{(L+2)(L+3)} C_{-1,1,0}^{2, L+2, L} + \sqrt{6} C_{0,0,0}^{2, L+2, L} \}.$$

Mit

$$(C, XVI, 6) \quad C_{1,-1,0}^{2, L+2, L} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L+3}{L+2}} C_{0,0,0}^{2, L+2, L}, \quad C_{-1,1,0}^{2, L+2, L} = C_{1,-1,0}^{2, L+2, L}$$

ergibt sich

$$(C, XVI, 7) \quad M = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{8\pi^2}{2L+1} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, L+2, L} C_{0,0,0}^{2, L+2, L} \left\{ \sqrt{6} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (L+3) \right\}$$

$$(C, XVI, 8) \quad M = +\frac{\hbar}{\sqrt{3}} \frac{8\pi^2}{2L+1} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, L+2, L} C_{0,0,0}^{2, L+2, L} \cdot (2L+3).$$

XVII. Matrixelemente für E2-Übergänge innerhalb der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns in adiabatischer Näherung

1. Übergang $J_a = J + 1 \rightarrow J_b = J$

Zu untersuchen ist hierfür zunächst das Matrixelement

$$M_1 = \langle D_{M_b, \bar{K}}^{J+1} \Psi_{\bar{v}, \bar{K}} + (-1)^{J+N-\frac{1}{2}} D_{M_b, -\bar{K}}^{J+1} \Psi_{\bar{v}, -\bar{K}} |$$

$$(C, XVII, 1) \cdot | D_{M_b-M_a, 1}^{J+1} J_{+1}^K - D_{M_b-M_a, -1}^{J+1} J_{-1}^K - \hbar \sqrt{3} D_{M_b-M_a, 0}^{J+1} J_{+1}^K + D_{M_b-M_a, -1}^{J+1} J_{-1}^K |$$

$$\cdot | D_{M_a, \bar{K}}^{J+1} \Psi_{\bar{v}, \bar{K}} + (-1)^{J+1+N-\frac{1}{2}} D_{M_a, -\bar{K}}^{J+1} \Psi_{\bar{v}, -\bar{K}} \rangle.$$

Da J_{+1} und J_{-1} mit $\Psi_{\bar{v}, \bar{K}}$ keine Diagonalelemente liefern und, wenn wir $\bar{K} \neq \frac{1}{2}$ voraussetzen, auch keine Mischelemente auftreten, können wir in adiabatischer Näherung die beiden letzten Terme des Störoperators weglassen. Wegen

$$(C, XVII, 2) \quad J_{+1}^K D_{M_a, \bar{K}}^{J+1} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(J+1+\bar{K})(J+2-\bar{K})} D_{M_a, \bar{K}-1}^{J+1}$$

$$J_{+1}^K D_{M_a, -\bar{K}}^{J+1} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(J+1-\bar{K})(J+2+\bar{K})} D_{M_a, -\bar{K}-1}^{J+1}$$

$$(C, XVII, 3) \quad -J_{-1}^K D_{M_a, \bar{K}}^{J+1} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(J+1-\bar{K})(J+2+\bar{K})} D_{M_a, \bar{K}+1}^{J+1}$$

$$-J_{-1}^K D_{M_a, -\bar{K}}^{J+1} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{(J+1+\bar{K})(J+2-\bar{K})} D_{M_a, -\bar{K}+1}^{J+1}$$

$$(C, XVII, 4) \quad \langle D_{M_b, \bar{K}}^{J+1} | D_{M_b-M_a, W}^{J+1} | D_{M_a, \bar{K}-W}^{J+1} \rangle = \frac{8\pi}{2J+1} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, J+1, J} C_{W, \bar{K}-W, \bar{K}}^{2, J+1, J}$$

und weil wegen der Orthogonalität der $\Psi_{\bar{v}, \bar{K}}$ mit den $\Psi_{\bar{v}, -\bar{K}}$ keine Mischelemente auftreten, gilt dann:

$$(C, XVII, 5) \quad M_1 = -\frac{8\pi^2}{2J+1} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, J+1, J} \{ \sqrt{(J+1+\bar{K})(J+2-\bar{K})} (C_{1, \bar{K}-1, \bar{K}}^{2, J+1, J} + (-1)^{2J} C_{-1, -\bar{K}-1, -\bar{K}}^{2, J+1, J}) +$$

$$+ \sqrt{(J+1-\bar{K})(J+2+\bar{K})} (C_{-1, \bar{K}+1, \bar{K}}^{2, J+1, J} + (-1)^{2J} C_{1, -\bar{K}+1, -\bar{K}}^{2, J+1, J}) + \sqrt{3} C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, J+1, J} \}.$$

Mit

$$(C, XVII, 6a) \quad C_{-1, -\bar{k}+1, -\bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} = (-1)^{3-\bar{z}-1-2} C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} ; \quad C_{1, -\bar{k}-1, -\bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} = (-1)^{3-\bar{z}-1-2} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}}$$

$$(C, XVII, 6b) \quad \sqrt{(3+1+\bar{k})(3+2-\bar{k})} C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} + \sqrt{(3+1-\bar{k})(3+2+\bar{k})} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} = \\ = -\frac{1}{\sqrt{6\bar{k}}} \{ (3+2\bar{k})(3+2-\bar{k}) - (3-2\bar{k})(3+\bar{k}+2) \} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} (3+4) C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}}$$

erhalten wir :

$$(C, XVII, 7) \quad M_1 = \frac{16\pi^2}{23+1} \hbar C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \frac{\bar{z}+1}{\sqrt{3}}$$

und wegen (B, V, 14) ==

$$(C, XVII, 8) \quad ME_{b, a, 1} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(23+1)(23+3)}{16\hbar^2 \cdot 16\hbar^2}} \frac{Q_{2,0}}{\odot_0} M_1$$

ergibt sich schließlich :

$$(C, XVII, 9) \quad ME_{b, a, 1} = +\sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \frac{\omega}{\hbar c} \frac{\hbar^2 (3+1)}{\odot_0} Q_{2,0}.$$

Jetzt ist noch das folgende Matrixelement zu berechnen :

$$(C, XVII, 10) \quad M_2 = \langle D_{M_b, \bar{k}}^3 \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} + (-1)^{3+N-\frac{1}{2}} D_{M_b, -\bar{k}}^3 \Psi_{\bar{v}, -\bar{k}} | D_{M_b-M_a, i}^2 \hat{Q}_{2, i} | \\ \cdot | D_{M_a, \bar{k}}^{3+1} \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} + (-1)^{3+N+\frac{1}{2}} D_{M_a, -\bar{k}}^{3+1} \Psi_{\bar{v}, -\bar{k}} \rangle.$$

Da für $\bar{k} \neq \frac{1}{2}$ keine Mischelemente auftreten können, liefert nur $i = 0$ ein nichtverschwindendes Matrixelement. Wegen (C, XVII, 4) und (C, XVII, 6a) gilt dann :

$$(C, XVII, 11) \quad M_2 = \frac{8\pi^2}{23+1} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \cdot \\ \{ \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle + \langle \Psi_{\bar{v}, -\bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, -\bar{k}} \rangle \} \delta_{i,0}.$$

Aus C, V, 2 entnehmen wir

$$(C, XVII, 12) \quad \langle \Psi_{\bar{v}, -\bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, -\bar{k}} \rangle = \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle.$$

Damit ergibt sich

$$(C, XVII, 13) \quad M_2 = \frac{16\pi^2}{23+1} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3} \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \delta_{l,0}.$$

Mit der aus (B,V,14) entnommenen Beziehung

$$(C, XVII, 14) \quad ME_{b,a,2}^i = + \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{\omega^2}{2C} \sqrt{\frac{(23+1)(23+3)}{16\pi^2 \cdot 16\pi^2}} M_2$$

erhalten wir schließlich :

$$(C, XVII, 15) \quad ME_{b,a,2}^i = - \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3} \frac{\omega^2}{C} \frac{1}{4\sqrt{6}} \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle.$$

2. Übergang $J_a = J + 2 \rightarrow J_b = J$

Mit den gleichen Überlegungen ergibt sich für das analog zum Fall $J_a = J+1 \rightarrow J_b = J$ definierte Matricelement $ME_{b,a,1}$:

$$(C, XVII, 16) \quad ME_{b,a,1} = - \sqrt{\frac{23+5}{23+1}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+2,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+2,3} \frac{\omega}{\hbar C} \frac{1}{4\sqrt{6}} \frac{\hbar^2(23+3)}{\Theta_0} Q_{2,0}$$

und für $ME_{b,a,2}^i$ erhalten wir

$$(C, XVII, 17) \quad ME_{b,a,2}^i = + \sqrt{\frac{23+5}{23+1}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+2,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+2,3} \frac{\omega^2}{C} \frac{1}{4\sqrt{6}} \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle.$$

Machen wir nun noch die in B,V nicht explizit ausgeführte Rechnung, die zum Betragsquadrat des gesamten Matricelements für diesen Fall führt. Setzen wir

$$(C, XVII, 18) \quad \hbar\omega = E_{a'} - E_b = \frac{\hbar^2(23+3)}{\Theta_0}$$

in (C,XVII,16) ein, so ergibt sich zunächst :

$$(C,XVII,19) \quad ME_{b,a,1} = + \sqrt{\frac{23+5}{23+1}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} \frac{\omega^2}{C} \frac{1}{4\sqrt{6}} Q_{2,0}.$$

Mit (C,XVII,17) und (C,XVII,19) gehen wir in

$$(C,XVII,20) \quad ME_{b,a} = ME_{b,a,1} + \sum_i ME_{b,a,2}^i$$

ein und erhalten schließlich :

$$\begin{aligned} & |ME_{b,a}|^2 = \\ (C,XVII,21) \quad & = \frac{\omega^4}{96c^2} \frac{23+5}{23+1} \left(C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} \right)^2 \left(C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} \right)^2 |Q_{2,0} + \langle \psi_{\bar{K}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{K}} \rangle|^2. \end{aligned}$$

XVIII. Matrizelemente für E2-Übergänge innerhalb der Rotationsbande eines u-g- oder g-u-Kerns in verbesserter Näherung

Für die Wellenfunktion 1. Ordnung für $\bar{K} \neq \frac{1}{2}$ -Banden gilt nach (B,II,68) :

$$\begin{aligned} \varphi_{u_g}^{1, \bar{3}, M, \bar{v}} &= |\bar{v}, \bar{3}, M, \bar{K}\rangle + \\ (C, XVIII, 1) \quad &+ \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}-1} | \hat{J}_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{K}-1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} |\bar{v}, \bar{3}, M, \bar{K}-1\rangle \\ &- \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}+1} | \hat{J}_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{K}+1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} |\bar{v}, \bar{3}, M, \bar{K}+1\rangle. \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber wollen wir in diesem Kapitel den oberen Index K bei den auf das $\xi-\eta-\zeta$ -System zerlegten Vektoren und Operatoren weglassen, da wir hier nur in diesem System rechnen und damit keine Verwechslung möglich ist. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} (C, XVIII, 2a) \quad C_{\bar{K}-1}^{3, \bar{v}} &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}-1} | \hat{J}_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{K}-1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} = (C_{\bar{K}-1}^{3, \bar{v}})^* \\ (C, XVIII, 2b) \quad C_{\bar{K}+1}^{3, \bar{v}} &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{K}+1} | \hat{J}_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{K}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{K}+1} - E_{\bar{v}, \bar{K}}} = (C_{\bar{K}+1}^{3, \bar{v}})^* \end{aligned}$$

und mit (A,II,5) $\equiv$

$$(C, XVIII, 3) \quad |\bar{v}, \bar{3}, M, K\rangle = \sqrt{\frac{23+1}{16\eta^2}} \{ D_{M,K}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},K} + (-1)^{3+N-\frac{1}{2}} D_{M,-K}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},-K} \}$$

gilt dann :

$$\begin{aligned} \varphi_{u_g}^{1, \bar{3}, M, \bar{v}} &= \sqrt{\frac{23+1}{16\eta^2}} [\{ D_{M,\bar{K}}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},\bar{K}} + (-1)^{3+N-\frac{1}{2}} D_{M,-\bar{K}}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},-\bar{K}} \} + \\ (C, XVIII, 4) \quad &+ \sum_{\bar{v}} C_{\bar{K}-1}^{3, \bar{v}} \{ D_{M,\bar{K}-1}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},\bar{K}-1} + (-1)^{3+N-\frac{1}{2}} D_{M,-\bar{K}+1}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},-\bar{K}+1} \} + \\ &+ \sum_{\bar{v}} C_{\bar{K}+1}^{3, \bar{v}} \{ D_{M,\bar{K}+1}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},\bar{K}+1} + (-1)^{3+N-\frac{1}{2}} D_{M,-\bar{K}-1}^{\bar{3}} \psi_{\bar{v},-\bar{K}-1} \}] \end{aligned}$$

Zu berechnen sind zunächst für die Übergänge

$J_a = J + \frac{1}{2} \rightarrow J_b = J$ die folgenden Matrizelemente :

$$(C, XVIII, 5) \quad M_{12}^1 = \langle \Psi_{u, \bar{K}}^{1, \bar{J}, M_b, \bar{V}} | D_{M_b - M_a, 1}^2 \bar{J}_{+1} - D_{M_b - M_a, -1}^2 \bar{J}_{-1} - \hbar \sqrt{3} D_{M_b - M_a, 0}^2 + D_{M_b - M_a, -1}^2 \bar{J}_{-1} - D_{M_b - M_a, 1}^2 \bar{J}_{+1} | \Psi_{u, \bar{K}}^{1, \bar{J}+2, M_b, \bar{V}} \rangle.$$

Da der Störterm bezüglich seiner Materialeigenschaften von erster Ordnung ist, und wir beim Matrixelement wie bei der Energie nur Beiträge bis zur zweiten Ordnung mitnehmen wollen, verbleibt unter Verwendung der Abkürzung

$$(C, XVIII, 6) \quad O_2(m) = O_2(M_b - M_a) = D_{M_b - M_a, 1}^2 \bar{J}_{+1} - D_{M_b - M_a, -1}^2 \bar{J}_{-1} - \hbar \sqrt{3} D_{M_b - M_a, 0}^2 - D_{M_b - M_a, 1}^2 \bar{J}_{+1} + D_{M_b - M_a, -1}^2 \bar{J}_{-1}$$

der folgende Ausdruck für das Matrixelement :

$$(C, XVIII, 7) \quad M_{12}^1 = \frac{V(2\bar{J}+1)(2\bar{J}+\frac{3}{2})}{16\pi^2} \cdot \{ \langle D_{M_b, \bar{K}}^3 \Psi_{\bar{V}, \bar{K}} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M_b, -\bar{K}}^3 \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}} | O_2(m) | D_{M_a, \bar{K}}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, \bar{K}} + (-1)^{\bar{J}+2+N-\frac{1}{2}} D_{M_a, -\bar{K}}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}} \rangle + \sum_{\bar{V}} C_{\bar{K}-1}^{* \bar{J}, \bar{V}} \langle D_{M_b, \bar{K}-1}^3 \Psi_{\bar{V}, \bar{K}-1} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M_b, -\bar{K}+1}^3 \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}+1} | O_2(m) | D_{M_a, \bar{K}}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, \bar{K}} + (-1)^{\bar{J}+2+N-\frac{1}{2}} D_{M_a, -\bar{K}}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}} \rangle + \sum_{\bar{V}} C_{\bar{K}+1}^{* \bar{J}, \bar{V}} \langle D_{M_b, \bar{K}+1}^3 \Psi_{\bar{V}, \bar{K}+1} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M_b, -\bar{K}-1}^3 \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}-1} | O_2(m) | D_{M_a, \bar{K}}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, \bar{K}} + (-1)^{\bar{J}+2+N-\frac{1}{2}} D_{M_a, -\bar{K}}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}} \rangle + \sum_{\bar{V}} C_{\bar{K}-1}^{\bar{J}+2, \bar{V}} \langle D_{M_b, \bar{K}}^3 \Psi_{\bar{V}, \bar{K}} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M_b, -\bar{K}}^3 \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}} | O_2(m) | D_{M_a, \bar{K}}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, \bar{K}-1} + (-1)^{\bar{J}+2+N-\frac{1}{2}} D_{M_a, -\bar{K}+1}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}+1} \rangle + \sum_{\bar{V}} C_{\bar{K}+1}^{\bar{J}+2, \bar{V}} \langle D_{M_b, \bar{K}}^3 \Psi_{\bar{V}, \bar{K}} + (-1)^{\bar{J}+N-\frac{1}{2}} D_{M_b, -\bar{K}}^3 \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}} | O_2(m) | D_{M_a, \bar{K}+1}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, \bar{K}+1} + (-1)^{\bar{J}+2+N-\frac{1}{2}} D_{M_a, -\bar{K}-1}^{\bar{J}+2} \Psi_{\bar{V}, -\bar{K}-1} \rangle \}.$$

Das gesamte Matrixelement zerfällt also in fünf Anteile :

$$(C, XVIII, 8) \quad M_{12}^1 = \frac{V(2\bar{J}+1)(2\bar{J}+\frac{3}{2})}{16\pi^2} [m_{12}^1 + m_{22}^1 + m_{32}^1 + m_{42}^1 + m_{52}^1].$$

Diese fünf Anteile sollen für den Übergang $J_a = J+1 \rightarrow J_b = J$ exemplarisch berechnet werden, da die Rechnung für den Übergang $J_a = J+2 \rightarrow J_b = J$ ganz genauso erfolgt. Mit (C, XVII, 7) gilt sofort für den ersten Anteil :

$$(C, XVIII, 9) \quad m_{11} = \frac{16\pi^2}{23+1} \hbar C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2,3+1,3} \frac{3+1}{\sqrt{3}}.$$

Mit

$$(C, XVIII, 10) \quad C_{\bar{K}-1}^{*3, \nu} = C_{\bar{K}-1}^{3, \nu} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \frac{\langle \Psi_{\nu, \bar{K}-1} | j_{-1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle}{E_{\nu, \bar{K}-1} - E_{\nu, \bar{K}}}$$

erhalten wir, da wegen der Orthogonalität der $\Psi_{\nu, K}$ nur die beiden letzten Terme des Störoperators $O_2(m)$ nichtverschwindende Beiträge zum Matrixelement liefern und da wegen $K \neq \frac{1}{2}$ keine Mischterme auftreten, für den Anteil m_{21} :

$$m_{21} =$$

$$(C, XVIII, 11) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \sum_{\nu} \frac{\langle \Psi_{\nu, \bar{K}-1} | j_{-1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle}{E_{\nu, \bar{K}-1} - E_{\nu, \bar{K}}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} \frac{8\pi^2}{23+1} \cdot \{ C_{-1, \bar{K}, \bar{K}-1}^{2,3+1,3} \langle \Psi_{\nu, \bar{K}-1} | j_{-1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle - (-1)^{23} C_{1, -\bar{K}, -\bar{K}+1}^{2,3+1,3} \langle \Psi_{\nu, -\bar{K}+1} | j_{+1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle \}.$$

Unter Verwendung der Clebsch-Gordan-Relation

$$(C, XVIII, 12) \quad C_{1, -\bar{K}, -\bar{K}+1}^{2,3+1,3} = (-1)^{3-2-3-1} C_{-1, \bar{K}, \bar{K}}^{2,3+1,3}$$

und der Formel (C, V, 13)

$$(C, XVIII, 13) \quad \langle \Psi_{\nu, -\bar{K}+1} | j_{+1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle = - \langle \Psi_{\nu, \bar{K}-1} | j_{-1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle$$

ergibt sich dann:

$$(C, XVIII, 14) \quad m_{21} = C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{-1, \bar{K}, \bar{K}}^{2,3+1,3} \cdot \frac{16\pi^2}{23+1} \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \cdot \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} \sum_{\nu} \frac{|\langle \Psi_{\nu, \bar{K}-1} | j_{-1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}-1} - E_{\nu, \bar{K}}}.$$

Durch völlig analoge Überlegungen folgt:

$$(C, XVIII, 15) \quad m_{31} = C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{1, \bar{K}, \bar{K}+1}^{2,3+1,3} \frac{16\pi^2}{23+1} \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \cdot \sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)} \sum_{\nu} \frac{|\langle \Psi_{\nu, \bar{K}+1} | j_{+1} | \Psi_{\nu, \bar{K}} \rangle|^2}{E_{\nu, \bar{K}+1} - E_{\nu, \bar{K}}}.$$

Mit

$$(C, XVIII, 16) \quad C_{\bar{k}-1}^{3+1,4} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{V(3+1+\bar{k})(3-\bar{k}+2)}{E_{\bar{v},\bar{k}-1} - E_{\bar{v},\bar{k}}} \frac{\langle \psi_{\bar{v},\bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},\bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v},\bar{k}-1} - E_{\bar{v},\bar{k}}}$$

erhalten wir wieder, da wegen der Orthogonalität der nur die beiden letzten Terme des Störoperators $O_2(m)$ nichtverschwindende Beiträge zum Matrixelement liefern und da für $\bar{k} = \frac{1}{2}$ keine Mischterme auftreten, für den Anteil $m41$:

$$m41 =$$

$$(C, XVIII, 17) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \frac{V(3+1+\bar{k})(3-\bar{k}+2)}{E_{\bar{v},\bar{k}-1} - E_{\bar{v},\bar{k}}} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v},\bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},\bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v},\bar{k}-1} - E_{\bar{v},\bar{k}}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} \frac{8\pi^2}{23+1} \cdot \{ -C_{1,\bar{k}-1,\bar{k}}^{2,3+1,3} \langle \psi_{\bar{v},\bar{k}} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},\bar{k}-1} \rangle + (-1)^{23} C_{-1,\bar{k}+1,\bar{k}}^{2,3+1,3} \langle \psi_{\bar{v},-\bar{k}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},-\bar{k}+1} \rangle \}.$$

Unter Verwendung der Clebsch-Gordan-Relation

$$(C, XVIII, 18a) \quad C_{-1,-\bar{k}+1,\bar{k}}^{2,3+1,3} = (-1)^{3-2-3-1} C_{1,\bar{k}-1,\bar{k}}^{2,3+1,3}$$

und mit den in C,V bewiesenen Formeln

$$(C, XVIII, 18b) \quad \langle \psi_{\bar{v},\bar{k}} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},\bar{k}-1} \rangle = - \langle \psi_{\bar{v},\bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},\bar{k}} \rangle$$

$$(C, XVIII, 18c) \quad \langle \psi_{\bar{v},-\bar{k}} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},-\bar{k}+1} \rangle = - \langle \psi_{\bar{v},-\bar{k}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},-\bar{k}} \rangle$$

ergibt sich :

$$(C, XVIII, 19) \quad m41 = C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{1,\bar{k}-1,\bar{k}}^{2,3+1,3} \frac{16\pi^2}{23+1} \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \cdot \frac{V(3+1+\bar{k})(3-\bar{k}+2)}{E_{\bar{v},\bar{k}-1} - E_{\bar{v},\bar{k}}} \sum_{\bar{v}} \frac{|\langle \psi_{\bar{v},\bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v},\bar{k}} \rangle|^2}{E_{\bar{v},\bar{k}-1} - E_{\bar{v},\bar{k}}}.$$

Durch völlig analoge Überlegungen folgt :

$$(C, XVIII, 20) \quad m51 = C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{-1,\bar{k}+1,\bar{k}}^{2,3+1,3} \frac{16\pi^2}{23+1} \frac{\hbar}{\sqrt{2}\Theta_0} \cdot \frac{V(3+1-\bar{k})(3+\bar{k}+2)}{E_{\bar{v},\bar{k}+1} - E_{\bar{v},\bar{k}}} \sum_{\bar{v}} \frac{|\langle \psi_{\bar{v},\bar{k}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v},\bar{k}} \rangle|^2}{E_{\bar{v},\bar{k}+1} - E_{\bar{v},\bar{k}}},$$

Insgesamt ergibt sich dann :

$$(C, XVIII, 21) \quad M_{11} = \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} \hbar C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} \left[\frac{3+1}{\sqrt{3}} C_{0, \bar{r}, \bar{k}}^{2,3+1,3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Theta_0 \left\{ \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ \left(\sqrt{(3+\bar{k})(3-\bar{k}+1)} C_{-1, \bar{k}, \bar{k}-1}^{2,3+1,3} + \sqrt{(3+1+\bar{k})(3-\bar{k}+2)} C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2,3+1,3} \right) \sum_{\gamma} \frac{|\langle \psi_{1, \bar{k}-1} | j-1 | \psi_{\bar{r}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \bar{r}-1} - E_{\bar{r}, \bar{k}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sqrt{(3-\bar{k})(3+\bar{k}+1)} C_{1, \bar{k}, \bar{k}+1}^{2,3+1,3} + \sqrt{(3+1-\bar{k})(3+\bar{k}+2)} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2,3+1,3} \right) \sum_{\gamma} \frac{|\langle \psi_{\bar{r}, \bar{k}+1} | j+1 | \psi_{\bar{r}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \bar{k}+1} - E_{\bar{r}, \bar{k}}} \right\} \right\} .$$

Unter Verwendung der folgenden Beziehungen über Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$(C, XVIII, 22a) \quad \sqrt{(3+\bar{k})(3-\bar{k}+1)} C_{-1, \bar{k}, \bar{k}-1}^{2,3+1,3} + \sqrt{(3+1+\bar{k})(3-\bar{k}+2)} C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2,3+1,3} = \frac{-2}{\sqrt{6}} (3+1) C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3}$$

$$(C, XVIII, 22b) \quad \sqrt{(3-\bar{k})(3+\bar{k}+1)} C_{1, \bar{k}, \bar{k}+1}^{2,3+1,3} + \sqrt{(3+1-\bar{k})(3+\bar{k}+2)} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2,3+1,3} = \frac{-2}{\sqrt{6}} (3+1) C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3}$$

erhalten wir :

$$(C, XVIII, 23) \quad M_{11} = \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} \hbar C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3} \frac{3+1}{\sqrt{3}} \cdot \\ \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\gamma} \left(\frac{|\langle \psi_{1, \bar{k}-1} | j-1 | \psi_{\bar{r}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \bar{r}-1} - E_{\bar{r}, \bar{k}}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{r}, \bar{k}+1} | j+1 | \psi_{\bar{r}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \bar{k}+1} - E_{\bar{r}, \bar{k}}} \right) \right\} .$$

Führen wir die aus A, II entnommene Größe

$$(C, XVIII, 24) \quad \Theta_{\text{eff}}(\bar{r}, \bar{k})^{-1} = \\ = \frac{1}{\Theta_0} \left\{ 1 - \frac{1}{\Theta_0} \sum_{\gamma} \left(\frac{|\langle \psi_{1, \bar{k}-1} | j-1 | \psi_{\bar{r}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \bar{r}-1} - E_{\bar{r}, \bar{k}}} + \frac{|\langle \psi_{\bar{r}, \bar{k}+1} | j+1 | \psi_{\bar{r}, \bar{k}} \rangle|^2}{E_{\gamma, \bar{k}+1} - E_{\bar{r}, \bar{k}}} \right) \right\}$$

ein, dann gilt :

$$(C, XVIII, 25) \quad M_{11} = \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} \hbar C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3} \frac{3+1}{\sqrt{3}} \frac{\Theta_0}{\Theta_{\text{eff}}(\bar{r}, \bar{k})} .$$

Aus (B, V, 24) entnehmen wir

$$(C, XVIII, 26) \quad ME_{b, a, 1}^1 = + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{4c} \frac{Q_{20}}{\Theta_0} M_{11}$$

und erhalten dann endlich :

$$(C, XVIII, 27) \quad ME_{b, a, 1}^1 = + \frac{1}{4\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2\bar{3}+3}{2\bar{3}+1}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{3}+1, 3} C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{3}+1, 3} \frac{\omega}{\hbar C} \frac{\hbar^2 (3+1)}{\Theta_{\text{eff}}(\bar{\nu}, \bar{K})} Q_{2,0}.$$

Unter Verwendung von

$$(C, XVIII, 28) \quad \sqrt{(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)} C_{-1, \bar{K}, \bar{K}-1}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} + \sqrt{(3+2+\bar{K})(3+3-\bar{K})} C_{1, \bar{K}-1, \bar{K}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} (2\bar{3}+3) C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}}$$

$$(C, XVIII, 29) \quad \sqrt{(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)} C_{1, \bar{K}, \bar{K}+1}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} + \sqrt{(3+2-\bar{K})(3+3+\bar{K})} C_{-1, \bar{K}+1, \bar{K}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} (2\bar{3}+3) C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}}$$

sowie mit (C, XVIII, 24) ergibt sich für das beim Übergang $J_a = J+2 \rightarrow J_b = J$ auftretende Matrixelement $ME_{b, a, 1}^2$:

$$(C, XVIII, 30) \quad ME_{b, a, 1}^2 = + \frac{1}{4\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2\bar{3}+5}{2\bar{3}+1}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} C_{0, \bar{K}, \bar{K}}^{2, \bar{3}+2, \bar{3}} \frac{\omega}{\hbar C} \frac{\hbar^2 (2\bar{3}+3)}{\Theta_{\text{eff}}(\bar{\nu}, \bar{K})} Q_{2,0}.$$

Als Nächstes sind für die Übergänge $J_a = J + \frac{1}{2} \rightarrow J_b = J$ die Matrixelemente

$$(C, XVIII, 31) \quad M2_2^1 = \langle \psi_{u_3, \bar{K}}^{1, \bar{3}, M_b, \bar{\nu}} | \sum_i D_{M_b-M_a, i}^2 \hat{Q}_{2, i} | \psi_{u_3, \bar{K}}^{1, \bar{3}+\frac{1}{2}, M_a, \bar{\nu}} \rangle$$

zu berechnen. Für Banden mit $K \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ treten auch hier keine Mischelemente auf. (Nur diese Fälle wollen wir betrachten.) Deshalb erhalten wir für $M2_2^1$ einen zu (C, XVIII, 7) völlig analogen Ausdruck, in dem nur der Operator $O_2(m)$ durch

$$(C, XVIII, 32) \quad E_2(m) = E_2(M_b-M_a) = \sum_i D_{M_b-M_a, i}^2 \hat{Q}_{2, i}$$

zu ersetzen ist, und den wir nicht noch einmal explizit niederschreiben wollen. $M2_2^1$ zerfällt demnach auch in fünf Anteile:

$$(C, XVIII, 33) \quad M2_2^1 = \frac{\sqrt{(2\bar{3}+1)(2\bar{3}+\frac{3}{2})}}{4\sqrt{6}\pi^2} \cdot [n1_2^1 + n2_2^1 + n3_2^1 + n4_2^1 + n5_2^1].$$

Für den Übergang $J_a = J+1 \rightarrow J_b = J$ gilt mit (C, XVII, 13) sofort:

$$(C, XVII, 34) \quad n_{11} = -\frac{16\pi^2}{23+1} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0,\bar{K},\bar{K}}^{2,3+1,3} \langle \psi_{\bar{V},\bar{K}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle.$$

Mit

$$(C, XVIII, 35) \quad C_{\bar{K}-1}^{*3,\bar{V}} = C_{\bar{K}-1}^{3,\bar{V}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\theta_0} \frac{V(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)}{E_{\bar{V},\bar{K}-1} - E_{\bar{V},\bar{K}}} \frac{\langle \psi_{\bar{V},\bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle}{E_{\bar{V},\bar{K}-1} - E_{\bar{V},\bar{K}}}$$

gilt dann, da wegen $\bar{K} \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ keine Mischterme auftreten, für den Anteil n_{21} :

$$\begin{aligned} n_{21} = \\ (C, XVIII, 36) \quad &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\theta_0} \frac{V(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)}{V} \sum_{\bar{V}} \frac{\langle \psi_{\bar{V},\bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle}{E_{\bar{V},\bar{K}-1} - E_{\bar{V},\bar{K}}} C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} \frac{8\pi^2}{23+1} \\ &\cdot \{ C_{-1,\bar{K},\bar{K}-1}^{2,3+1,3} \langle \psi_{\bar{V},\bar{K}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle + (-1)^{23} C_{1,-\bar{K},-\bar{K}+1}^{2,3+1,3} \langle \psi_{\bar{V},-\bar{K}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{V},-\bar{K}} \rangle \}. \end{aligned}$$

Benützen wir die Clebsch-Gordan-Relation

$$(C, XVIII, 37) \quad C_{1,-\bar{K},-\bar{K}+1}^{2,3+1,3} = (-1)^{3-2-3-1} C_{-1,\bar{K},\bar{K}-1}^{2,3+1,3}$$

und die Formel (C,V,28)≡

$$(C, XVIII, 38) \quad \langle \psi_{\bar{V},-\bar{K}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle = \langle \psi_{\bar{V},\bar{K}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle,$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} n_{21} = & \frac{\hbar}{\sqrt{2}\theta_0} C_{M_b-M_a, M_b, M_a}^{2,3+1,3} C_{-1,\bar{K},\bar{K}-1}^{2,3+1,3} \frac{V(3+\bar{K})(3-\bar{K}+1)}{V} \cdot \frac{16\pi^2}{23+1} \\ (C, XVIII, 39) \quad & \cdot \sum_{\bar{V}} \frac{\langle \psi_{\bar{V},\bar{K}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle \langle \psi_{\bar{V},\bar{K}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle}{E_{\bar{V},\bar{K}-1} - E_{\bar{V},\bar{K}}} \end{aligned}$$

Mit völlig analogen Überlegungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} n_{31} = & \frac{-\hbar}{\sqrt{2}\theta_0} C_{M_b-M_a, M_b, M_a}^{2,3+1,3} C_{1,\bar{K},\bar{K}+1}^{2,3+1,3} \frac{V(3-\bar{K})(3+\bar{K}+1)}{V} \cdot \frac{16\pi^2}{23+1} \\ (C, XVIII, 40) \quad & \cdot \sum_{\bar{V}} \frac{\langle \psi_{\bar{V},\bar{K}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle \langle \psi_{\bar{V},\bar{K}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{V},\bar{K}} \rangle}{E_{\bar{V},\bar{K}+1} - E_{\bar{V},\bar{K}}} \end{aligned}$$

Wegen

$$(C, XVIII, 41) \quad C_{\bar{k}-1}^{3+1, \nu} = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} \frac{V(\bar{3}+1+\bar{k})(\bar{3}-\bar{k}+2)}{E_{\nu, \bar{k}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}} \frac{\langle \psi_{\nu, \bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} \rangle}{E_{\nu, \bar{k}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}}$$

gilt dann, da wieder keine Mischterme auftreten, für den Anteil n_{41} :

$$n_{41} =$$

$$(C, XVIII, 42) = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} \frac{V(\bar{3}+1+\bar{k})(\bar{3}-\bar{k}+2)}{E_{\nu, \bar{k}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}} \sum_{\nu} \frac{\langle \psi_{\nu, \bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} \rangle}{E_{\nu, \bar{k}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2, 3+1, 3} \frac{8\eta^2}{2\bar{3}+1} \cdot \{ C_{-1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2, 3+1, 3} \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\nu, \bar{k}-1} \rangle + (-1)^{\bar{3}} C_{-1, -\bar{k}+1, -\bar{k}}^{2, 3+1, 3} \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\nu, -\bar{k}+1} \rangle \}.$$

Gehen wir in diese Gleichung mit der Clebsch-Gordan-Relation

$$(C, XVIII, 43) \quad C_{-1, -\bar{k}+1, -\bar{k}}^{2, 3+1, 3} = (-1)^{\bar{3}-2-\bar{3}-1} C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2, 3+1, 3}$$

und den aus C,V entnommenen Formeln

$$(C, XVIII, 43a) \quad \langle \psi_{\bar{\nu}, -\bar{k}} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\nu, -\bar{k}+1} \rangle = \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\nu, \bar{k}-1} \rangle$$

$$(C, XVIII, 43b) \quad \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\nu, \bar{k}-1} \rangle = - \langle \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}-1} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\nu, \bar{k}} \rangle$$

ein, dann erhalten wir:

$$(C, XVIII, 44) \quad n_{41} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2, 3+1, 3} \cdot C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2, 3+1, 3} \frac{V(\bar{3}+1+\bar{k})(\bar{3}-\bar{k}+2)}{E_{\nu, \bar{k}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}} \frac{16\eta^2}{2\bar{3}+1} \cdot \sum_{\nu} \frac{\langle \psi_{\nu, \bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} \rangle \langle \psi_{\nu, \bar{k}-1} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} \rangle}{E_{\nu, \bar{k}-1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}}.$$

Durch völlig analoge Überlegungen ergibt sich:

$$(C, XVIII, 45) \quad n_{51} = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \Theta_0} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2, 3+1, 3} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2, 3+1, 3} \frac{V(\bar{3}+1-\bar{k})(\bar{3}+\bar{k}+2)}{E_{\nu, \bar{k}+1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}} \frac{16\eta^2}{2\bar{3}+1} \cdot \sum_{\nu} \frac{\langle \psi_{\nu, \bar{k}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} \rangle \langle \psi_{\nu, \bar{k}+1} | \hat{Q}_{2,1} | \psi_{\bar{\nu}, \bar{k}} \rangle}{E_{\nu, \bar{k}+1} - E_{\bar{\nu}, \bar{k}}}.$$

Damit erhalten wir insgesamt :

$$\begin{aligned}
 M_{21} = & \sqrt{\frac{2\bar{z}+3}{2\bar{z}+1}} \hbar C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \left\{ C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle + \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2} \Theta_0} \left[\sqrt{(\bar{z}+\bar{k})(\bar{z}-\bar{k}+1)} C_{-1, \bar{k}, \bar{k}-1}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} - \sqrt{(\bar{z}+1+\bar{k})(\bar{z}-\bar{k}+2)} C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \right] \cdot \\
 & \cdot \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | \hat{z}-1 | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}-1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{2} \Theta_0} \left[\sqrt{(\bar{z}-\bar{k})(\bar{z}+\bar{k}+1)} C_{1, \bar{k}, \bar{k}+1}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} - \sqrt{(\bar{z}+1-\bar{k})(\bar{z}+\bar{k}+2)} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \right] \cdot \\
 & \cdot \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | \hat{z}+1 | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}+1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} \cdot
 \end{aligned}$$

(C, XVIII, 46)

Unter Verwendung der folgenden Beziehungen über Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(\bar{z}+\bar{k})(\bar{z}-\bar{k}+1)} C_{-1, \bar{k}, \bar{k}-1}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} - \sqrt{(\bar{z}+1+\bar{k})(\bar{z}-\bar{k}+2)} C_{1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2}{\bar{k}} (\bar{z}^2 - \bar{k}^2 + 2\bar{z} + 3\bar{k}) C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}}
 \end{aligned}$$

(C, XVIII, 47)

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{(\bar{z}-\bar{k})(\bar{z}+\bar{k}+1)} C_{1, \bar{k}, \bar{k}+1}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} - \sqrt{(\bar{z}+1-\bar{k})(\bar{z}+\bar{k}+2)} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2}{\bar{k}} (\bar{z}^2 - \bar{k}^2 + 2\bar{z} - 3\bar{k}) C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}}
 \end{aligned}$$

(C, XVIII, 48)

ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 (C, XVIII, 49) \quad M_{21} = & \sqrt{\frac{2\bar{z}+3}{2\bar{z}+1}} \hbar C_{M_b-M_a, M_a, M_b}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2, \bar{z}+1, \bar{z}} \cdot \\
 & \cdot \left\{ \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle + \right. \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3} \Theta_0} \frac{\bar{z}^2 - \bar{k}^2 + 2\bar{z} + 3\bar{k}}{\bar{k}} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | \hat{z}-1 | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}-1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3} \Theta_0} \frac{\bar{z}^2 - \bar{k}^2 + 2\bar{z} - 3\bar{k}}{\bar{k}} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | \hat{z}+1 | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \Psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \Psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}+1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} \left. \right\} .
 \end{aligned}$$

Definieren wir die Abkürzung

$$(C, XVIII, 50) \quad Q_{2,0}^{T,1} = \langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle + \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} \frac{3^2 - \bar{k}^2 + 23 + 3\bar{k}}{\bar{k}} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}-1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}} \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} \frac{3^2 - \bar{k}^2 + 23 - 3\bar{k}}{\bar{k}} \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle \langle \psi_{\bar{v}, \bar{k}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{k}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{k}+1} - E_{\bar{v}, \bar{k}}},$$

so ergibt sich mit (B, V, 24)

$$(C, XVIII, 51) \quad ME_{b,a,2}^1 = \frac{1}{2\sqrt{24}} \frac{\omega^2}{c} M_{21}$$

endlich :

$$(C, XVIII, 52) \quad ME_{b,a,2}^1 = \frac{1}{4\sqrt{6}} \frac{\omega^2}{c} \sqrt{\frac{23+3}{23+1}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+1,3} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+1,3} Q_{2,0}^{T,1}.$$

Für den Übergang $J_a = J+2 \rightarrow J_b = J$ erhalten wir mit den ganz analogen Überlegungen unter Verwendung der folgenden Clebsch-Gordan-Beziehungen :

$$(C, XVIII, 53) \quad \sqrt{(3+\bar{k})(3-\bar{k}+1)} C_{-1, \bar{k}, \bar{k}-1}^{2,3+2,3} - \sqrt{(3+2\bar{k})(3+\bar{k})} C_{+1, \bar{k}-1, \bar{k}}^{2,3+2,3} = \\ = \frac{2(3-2\bar{k})}{\sqrt{6}} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+2,3}$$

$$(C, XVIII, 54) \quad -\sqrt{(3-\bar{k})(3+\bar{k}+1)} C_{-1, \bar{k}, \bar{k}+1}^{2,3+2,3} + \sqrt{(3+2\bar{k})(3+3\bar{k})} C_{-1, \bar{k}+1, \bar{k}}^{2,3+2,3} = \\ = \frac{2(-3-2\bar{k})}{\sqrt{6}} C_{0, \bar{k}, \bar{k}}^{2,3+2,3}$$

$$(C, XVIII, 55) \quad ME_{b,a,2}^2 = \frac{1}{4\sqrt{6}} \frac{\omega^2}{c} \sqrt{\frac{23+5}{23+1}} C_{M_b - M_a, M_a, M_b}^{2,3+2,3} C_{0, \bar{R}, \bar{R}}^{2,3+2,3} Q_{2,0}^{T,2},$$

wobei

$$(C, XVIII, 56) \quad Q_{2,0}^{T,2} = \langle \psi_{\bar{v}, \bar{R}} | \hat{Q}_{2,0} | \psi_{\bar{v}, \bar{R}} \rangle + \\ + \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} (3-2\bar{R}) \cdot \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{R}-1} | j_{-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{R}} \rangle \langle \psi_{\bar{v}, \bar{R}-1} | \hat{Q}_{2,-1} | \psi_{\bar{v}, \bar{R}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{R}-1} - E_{\bar{v}, \bar{R}}} \\ - \frac{\hbar}{\sqrt{3}\Theta_0} (3+2\bar{R}) \cdot \sum_{\bar{v}} \frac{\langle \psi_{\bar{v}, \bar{R}+1} | j_{+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{R}} \rangle \langle \psi_{\bar{v}, \bar{R}+1} | \hat{Q}_{2,+1} | \psi_{\bar{v}, \bar{R}} \rangle}{E_{\bar{v}, \bar{R}+1} - E_{\bar{v}, \bar{R}}}.$$

Literaturverzeichnis

- 1 A.K. Kerman, Math. Phys. Medd. 30, Bind, 15 (1955)
- 2 J.P. Davidson, Rev. Mod. Phys. 37, 1,105 (1965)
- 3 J.P. Davidson, Collective Models of the Nucleus, Academic Press, New York 1968
- 4 G. Mauron, J. Kern et O. Huber, Nucl. Phys. A181, 489-516 (1972)
- 5 L. Funke, K.-H. Kaun, P. Kemnitz, H. Sodan and G. Winter, Nucl. Phys. A170, 593-606 (1971)
- 6 G. Winter, L. Funke, K.-H. Kaun, P. Kemnitz and H. Sodan, Nucl. Phys. A176, 609-625 (1971)
- 7 O. Prior, Ark. f. Fysik, Band 14 nr 28, 451 (1958)
- 8 H. Ruder, Z. Naturforsch. 28a, Nr. 213 (1973)
Z. Naturforsch. 28a, Nr. 9 (1973)
- 9 A.S. Dawydow, Theorie des Atomkerns, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963
- 10 M. Reinecke, Diplomarbeit, unveröffentlicht, Erlangen 1970
- 11 M. Reinecke, H. Ruder, H. Volz, Z. Naturforsch. 27a, 850-859 (1972)
- 12 S.G. Nilsson, Math. Phys. Medd. 29, Bind, 16 (1954-55)

- 13 C.M. Lederer, J.M. Hollander and I. Perlman, Table of Isotopes, J. Wiley & Sons, New York 1967
- 14 H. Näpfel, Z. Naturforsch. 24a, 1883 (1969)
- 15 C. Gustafson, I.L. Lamm, B. Nilsson and S.G. Nilsson, Ark. f. Fysik, Band 36 nr 69, 613 (1966)
- 16 F.A. Gareev, S.P. Ivanova, L.A. Malov and V.G. Soloviev, Nucl. Phys. A171, 134-164 (1971)
- 17 N.D. Newby Jr., Phys. Rev. 125, 2063 (1962)
- 18 H.D. Jones, N. Onishi, T. Hess and R.K. Sheline, Phys. Rev. C3, 529 (1970)
- 19 H.D. Jones and R.K. Sheline, Phys. Rev. C2, 1747 (1970)
- 20 H.D. Jones and R.K. Sheline, Nucl. Phys. A150, 497-519 (1970)
- 21 H.T. Motz and E.T. Jurney et al., Phys. Rev. 155, 1265 (1967)
- 22 Z. Preibisz, D.G. Burke, R.A. O'Neil, Nucl. Phys. A201, 486-512 (1973)
- 23 R.K. Sheline and C.E. Watson et al., Phys. Rev. 143, 857 (1966)
- 24 J. Treherne and J. Vanhorenbeeck and J. Valentin, Nucl. Phys. A131, 193-224 (1969)
- 25 R.A. O'Neil and D.G. Burke, Nucl. Phys. A195, 207-240 (1972)

- 26 M.K. Balodis, J.J. Tambergs, K.J. Alksnis and
P.T. Prokofjev et al., Nucl. Phys. A194, 305-328 (1972)
- 27 R.G. Helmer, R.C. Greenwood and C.W. Reich, Nucl.
Phys. A168, 449-486 (1971)
- 28 R.G. Lanier and R.K. Sheline et al., Phys. Rev. 178,
1919 (1969)
- 29 W. Ogle, S. Wahlborn and H. Ryde, Nucl. Phys. A188,
316-336 (1972)
- 30 H. Näpfel, H. Ruder, H. Volz, Z. Naturforsch. 23a,
199 (1968)
- 31 K. Dietrich, H.J. Mang und J. Pradahl, Phys. Rev. 133,
B22 (1964)
- 32 M.E. Rose, Internal Conversion Coefficients, North-
Holland Publishing Company, Amsterdam
- 33 G. Baumgärtner, P. Schuck, Kernmodelle, Bibliogra-
phisches Institut AG, Mannheim (1968)
- 34 H. Ruder, Dissertation, Erlangen (1968)

Lebenslauf

Am 29. April 1947 wurde ich, Michael Reinecke, als Sohn des jetzigen Bundesbankdirektors Paul Reinecke und dessen Ehefrau Gertrud Reinecke, geborene Petzet, in Bayreuth geboren und dort am 30. 9. 1947 evangelisch getauft.

1950 übersiedelten wir nach Hof/Bayern und im Jahre 1952 nach München.

Ab September 1953 besuchte ich dort die Volksschule II an der Situlistraße, bis wir 1955 im August nach Garmisch-Partenkirchen umzogen.

Von September 1955 bis Juli 1957 war ich Schüler der evangelischen Volksschule Garmisch und trat im September 1957 in die Oberrealschule Garmisch-Partenkirchen ein.

Am Schuljahrsende 1962 erfolgte unser Umzug von Garmisch-Partenkirchen nach Erlangen. Hier wurde ich im September 1962 in die sechste Klasse des Ohm-Gymnasiums aufgenommen und machte dort im Juli 1966 mein Abitur.

Danach bestand ich in Nürnberg eine Prüfung für besonders Begabte und begann 1966 an der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg mein Physikstudium.

Am 1. 11. 1968 legte ich die Diplom-Vorprüfung und am 29. 4. 1971 die Diplom-Hauptprüfung für Physik mit Erfolg ab.

Nachdem ich bereits von Oktober 1968 bis Februar 1971 in der Angewandten Mathematik und in der Theoretischen Physik als studentische Hilfskraft tätig war, wurde ich am 1. 6. 1971 wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik. Seit 1. 1. 1973 bin ich dort Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990